Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | Época Especial | Ensino Secundário | 2022

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 12 Páginas

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

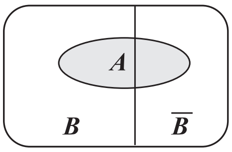
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Modelos de probabilidade

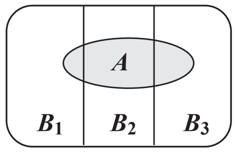
Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores $1, 2$ ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

1. Um clube vai participar na final da Taça Amizade. Dispõe de 710 convites para distribuir pelos sócios dos seus três núcleos, A, B e C.

A distribuição desses convites é feita de acordo com o método a seguir descrito.

- Calcula-se o divisor padrão, dividindo o número total de sócios dos três núcleos pelo número total de convites.
- Calcula-se a quota padrão para cada um dos núcleos, dividindo o número de sócios de cada núcleo pelo divisor padrão.
- Atribui-se a cada núcleo um número de convites igual à parte inteira da quota padrão.
- Caso ainda fiquem convites por distribuir, atribuem-se os convites que restam aos núcleos cujas quotas padrão tenham partes decimais maiores (um por cada núcleo).
- Se houver dois núcleos cujas quotas padrão apresentem a mesma parte decimal, o último convite é atribuído ao núcleo com o menor número de convites.

Na Tabela 1, está registado o número de sócios de cada núcleo.

Tabela 1

Núcleo	Número de sócios
A	938
B	1152
C	395

* **1.1.** Suponha que o núcleo A dispensava os 268 convites que, aplicando o método descrito, lhe seriam atribuídos e que estes eram distribuídos, de forma diretamente proporcional ao número de sócios, pelos outros dois núcleos.

Quantos destes convites seriam atribuídos ao núcleo C?

(A) 43

(B) 45

(C) 68

(D) 124

1.2. Admita que houve uma entrada recente de novos sócios nos núcleos A e B, havendo necessidade de redistribuir os 710 convites.

Na Tabela 2, está registado o novo número de sócios de cada núcleo.

Tabela 2

Núcleo	Número de sócios
A	939
B	1159
C	395
Total	2493

Determine o número de convites que cada núcleo recebeu após a entrada dos novos sócios, aplicando o método descrito.

Na sua resposta, apresente o valor do divisor padrão e os valores das quotas padrão, com arredondamento às centésimas.

*** 2.** Um jornal desportivo convidou os leitores a participarem na eleição do melhor jogador de futebol de 2021, de entre os jogadores P, Q, R e S.

Cada leitor ordenou, uma única vez, os quatro jogadores, de acordo com a sua preferência. A ordenação efetuada por cada leitor corresponde a um voto. Foram apurados 1200 votos válidos.

A Tabela 3 encontra-se parcialmente preenchida com as listas de preferências obtidas.

Tabela 3

	Lista 1	**Lista 2**	**Lista 3**
	200 votos	400 votos	600 votos
1.ª Preferência	P		
2.ª Preferência		P	
3.ª Preferência		S	P
4.ª Preferência	S		

Concluída a votação, para se obter a decisão final, foi aplicado o método a seguir descrito.

- São atribuídos pontos a cada um dos jogadores, em função do seu lugar nas listas de preferências. Cada jogador recebe:
  - quatro pontos por cada voto na primeira preferência;
  - três pontos por cada voto na segunda preferência;
  - dois pontos por cada voto na terceira preferência;
  - um ponto por cada voto na quarta preferência.
- Contabiliza-se a pontuação total de cada um dos jogadores.
- O jogador que obtiver a pontuação total mais elevada será eleito o melhor jogador de futebol de 2021.

Admita que, após o apuramento da pontuação total de cada jogador, se verificou que:

– o jogador Q obteve um total de 1400 pontos;

– o jogador S obteve uma pontuação total inferior à do jogador P.

Apresente a ordenação dos jogadores P, Q, R e S na Lista 3.

Na sua resposta, apresente todas as justificações e todos os cálculos efetuados.

*** 3.** Com o intuito de avaliar as condições de segurança de alguns estádios de futebol, uma comissão vai proceder à sua inspeção.

Na Tabela 4, para cada um dos sete estádios passíveis de inspeção, estão indicados o país onde o estádio se localiza e a sua capacidade.

Tabela 4

País onde o estádio se localiza	Capacidade do estádio
África do Sul	94 736
Austrália	83 500
Coreia do Norte	114 000
Espanha	99 354
França	81 338
Inglaterra	90 000
México	87 000

A comissão decidiu inspecionar apenas os estádios com capacidade superior a 85 000 espectadores.

De modo a definir um percurso, considerou a duração do voo entre os diferentes países que se apresentam na Tabela 5.

Tabela 5

	Austrália	Coreia do Norte	Espanha	França	México	Inglaterra
África do Sul	14h13	15h57	10h25	11h22	18h38	11h46
Austrália		11h50	21h52	21h35	16h38	21h38
Coreia do Norte			12h12	11h24	15h26	11h16
Espanha				1h32	12h18	1h55
França					11h56	5h24
México						11h36

O percurso será definido atendendo ao método seguinte:

- escolher o menor tempo de voo, qualquer que ele seja;
- escolher, sucessivamente, os menores tempos de voo, garantindo que não são selecionados mais de dois voos que partam do mesmo país ou que cheguem ao mesmo país, e terminar depois de serem selecionados todos os países onde se localizam os estádios a inspecionar.

Apresente o percurso a efetuar pela comissão, com início na África do Sul.

Na sua resposta, apresente:

– um grafo que resulte da aplicação do algoritmo descrito;

– a ordem pela qual a comissão visitará os estádios.

*** 4.** Uma atleta de alta competição precisa de adquirir um novo equipamento para as suas provas.

Dado o elevado custo do equipamento, contraiu um empréstimo nas condições seguintes.

- Valor financiado: 1200 €.
- Prazo de pagamento: dois anos.
- Taxa de juro sobre o valor financiado: 16%.
- Pagamento: prestações mensais constantes.

Determine o valor da prestação mensal que a atleta terá de pagar.

5. O Campeonato Mundial de Fórmula 1 é composto por várias corridas, denominadas Grandes Prémios (GP), que se realizam em países diferentes.

No final de cada GP, são atribuídos pontos aos pilotos, até à 10.ª posição, em função do lugar em que cada um terminou a prova.

Na Tabela 6, está representado o sistema de pontuação utilizado.

Tabela 6

Lugar	**1.º**	**2.º**	**3.º**	**4.º**	**5.º**	**6.º**	**7.º**	**8.º**	**9.º**	**10.º**
Pontos	25	18	15	12	10	8	6	4	2	1

*** 5.1.** Um piloto obteve 58 pontos nos três primeiros GP.

Por quantas vezes, no máximo, pode ter ficado em segundo lugar?

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

5.2. Em cada temporada do Campeonato Mundial de Fórmula 1, é definida previamente a ordem dos GP.

Numa determinada temporada, o GP da Austrália foi o primeiro a realizar-se, seguindo-se os da Espanha, do Canadá, do Reino Unido, da Itália, da França e do Japão.

Na Figura 1, está registada a variação do número de pontos obtidos por Mike, um dos pilotos, em cada GP, em relação ao número de pontos obtidos no GP imediatamente anterior.

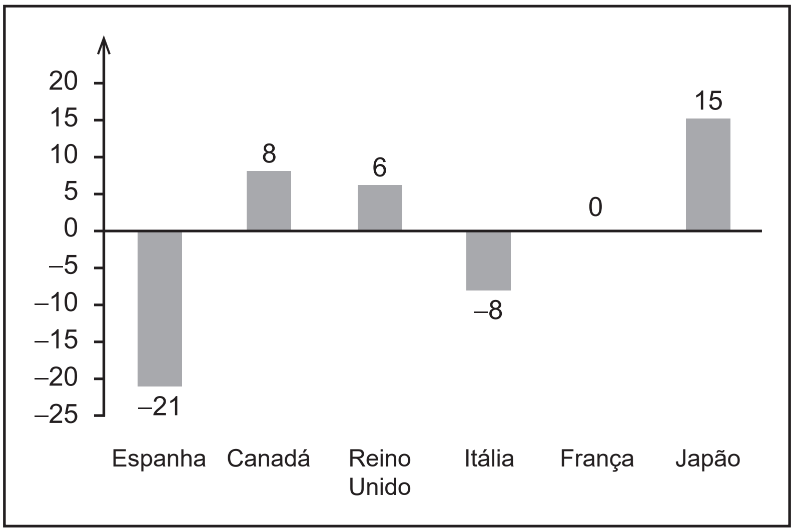


Figura 1

* **5.2.1.** No GP do Reino Unido, Mike obteve 18 pontos.

Determine o número médio de pontos obtidos por este piloto nos quatro últimos GP apresentados na Figura 1.

5.2.2. As condições meteorológicas podem limitar a realização dos GP, inviabilizando a realização da totalidade das voltas previstas. Caso uma corrida termine antes de se efetuar um número de voltas correspondente a 70% do total de voltas previstas, atribui-se a cada um dos dez primeiros pilotos metade dos pontos apresentados na Tabela 6, arredondados às unidades.

Admita que:

– o total de voltas do GP da Espanha é 66 e que, devido a condições adversas, só foram realizadas 45 voltas;

– Mike obteve o primeiro lugar no GP da Austrália, onde se percorreram todas as voltas previstas.

Determine o lugar em que Mike terminou o GP da Espanha.

6. A canoagem é um desporto náutico praticado com uma canoa ou com um caiaque.

Uma das modalidades deste desporto é a canoagem de velocidade, na qual se insere a prova K1 1000 m. Nesta prova, a embarcação, um caiaque, tem apenas um lugar (K1), como se representa na Figura 2, devendo o atleta percorrer 1000 metros.

Figura 2

Um atleta participou numa prova de canoagem K1 1000 m.

Admita que, enquanto a prova decorreu, a distância, D, percorrida pelo seu caiaque, em metros, t segundos após o início da prova, é bem aproximada pelo modelo seguinte, com arredondamento às centésimas.

$$D(t) = -3680 + 1840 \log(t+100) \qquad t \geq 0 \qquad (\log \text{ designa o logaritmo de base } 10)$$

Assim, por exemplo, como $D(3) \approx 23{,}62049$, a distância percorrida pelo caiaque do atleta, 3 segundos após o início da prova, foi, aproximadamente, $23{,}62$ metros.

6.1. Perante os dados recolhidos, o atleta afirmou:

«Fui mais rápido nos primeiros cinco segundos da prova do que nos cinco segundos seguintes.»

Justifique a afirmação do atleta, baseando-se no modelo apresentado.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

6.2. O recorde mundial desta prova é 3 minutos e 15 segundos.

Qual é a diferença entre o tempo alcançado pelo atleta e o recorde mundial?

Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

– o(s) gráfico(s) visualizado(s);

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às décimas.

7. O Alexandre é um jogador profissional de ténis e tem uma equipa técnica que o acompanha e que recolhe dados diversos.

* **7.1.** Os torneios de ténis podem ser disputados em diferentes tipos de piso, nomeadamente em piso sintético ou em piso de terra batida.

Dos adversários que o Alexandre enfrentará num torneio de ténis, sabe-se que:

- 90% venceram torneios disputados em piso sintético ou em piso de terra batida;
- 60% nunca venceram torneios disputados em piso de terra batida.

Qual é a probabilidade de o próximo adversário do Alexandre ter vencido torneios disputados em piso sintético e nunca ter vencido torneios disputados em piso de terra batida?

(A) $0{,}2$ **(B)** $0{,}4$ **(C)** $0{,}5$ **(D)** $0{,}6$

* **7.2.** Ao começar uma partida, o Alexandre faz uma primeira tentativa para colocar a bola em jogo (primeiro serviço). Se não for bem-sucedido, pode ainda fazer uma segunda tentativa (segundo serviço). Quando a bola está em jogo, disputa-se um ponto entre os jogadores.

A equipa técnica recolhe dados que incidem na proporção de primeiros serviços bem-sucedidos e na proporção de vezes em que o Alexandre pontua, conforme foi, ou não, bem-sucedido no primeiro serviço.

Na Figura 3, apresenta-se a recolha de dados efetuada pela equipa técnica.

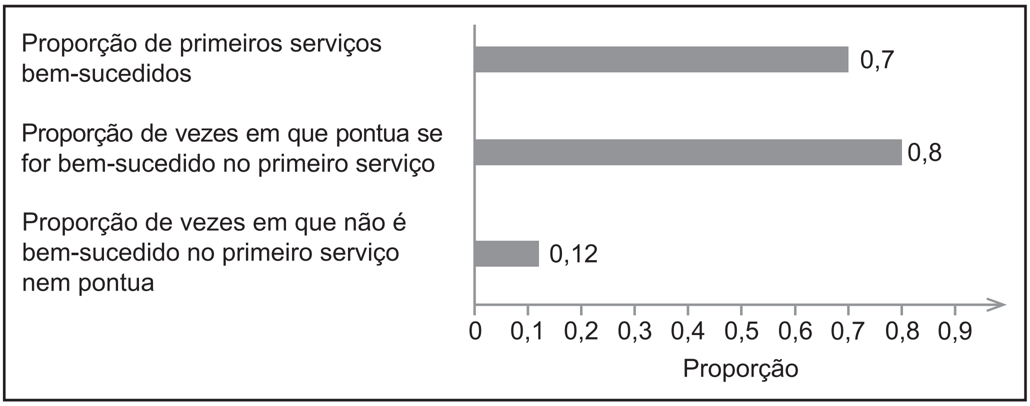


Figura 3

Determine a probabilidade de, tendo colocado uma bola em jogo, o Alexandre pontuar.

Apresente o resultado na forma de dízima.

7.3. A equipa técnica analisou a eficácia do Alexandre ao defender o serviço dos seus adversários.

Com base nos dados, determinou que a probabilidade de o atleta conseguir defender um serviço dos seus adversários é $0{,}6$.

Considere que o Alexandre vai tentar defender dois serviços dos seus adversários.

Determine a probabilidade de o Alexandre conseguir defender, no máximo, um serviço dos seus adversários.

*** 8.** Num jogo de basquetebol, verificou-se que, numa amostra de 225 espectadores aleatoriamente selecionados no recinto desportivo, 81 tinham comprado *online* o ingresso para o jogo.

Determine um intervalo de confiança a 99% para a proporção de espectadores que adquiriram *online* o ingresso para o jogo.

Apresente os extremos do intervalo de confiança com arredondamento às centésimas.

Na sua resposta:

– utilize a calculadora apenas para efetuar cálculos numéricos;

– caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve quatro casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.1.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	18	20	18	12	18	12	18	18	**146**

Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**1.2.**	**5.2.2.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.3.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 x 18 pontos					**54**
TOTAL						**200**