REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2024

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \, \cos b + \operatorname{sen} b \, \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \, \cos b - \operatorname{sen} a \, \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho \, e^{i\theta})^n = \rho^n \, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} \; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \, e^u$

$(a^u)' = u' \, a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $[-1,3]$.

Qual é o contradomínio da função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=f(x-2)+1$?

(A) $[-3,1]$

(B) $[-2,2]$

(C) $[0,4]$

(D) $[1,5]$

2. Uma orquestra está a realizar audições para novos instrumentistas.

2.1. No primeiro dia das audições, participaram apenas candidatos a flautistas e a violinistas.

Sabe-se que:

- $\frac{3}{5}$ dos candidatos eram violinistas;
- o número de candidatos estrangeiros era igual ao número de candidatos portugueses;
- $\frac{3}{10}$ dos candidatos estrangeiros eram flautistas.

Seleciona-se, ao acaso, um dos candidatos que participaram no primeiro dia das audições.

Determine a probabilidade de esse candidato ser português, sabendo-se que é violinista.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. Enquanto aguardam as audições, quatro violinistas, um violoncelista e três contrabaixistas vão sentar-se nas duas primeiras filas de uma plateia, tendo cada fila quatro lugares numerados de 1 a 4.

Qual das expressões seguintes representa o número de maneiras diferentes de dispor os oito músicos, ficando os três contrabaixistas numa fila?

(A) ${}^4C_3 \times 3! \times 5!$

(B) $2 \times {}^4A_3 \times 5!$

(C) $2 \times {}^4C_3 \times 5!$

(D) ${}^4A_3 \times 3 \times 5!$

2.3. Para se preparar para a audição de violino, a Constança praticou durante m dias.

Sabe-se que a Constança praticou:

- em cada dia, exceto no primeiro, sempre mais 10 minutos do que no dia anterior;
- 60 minutos no quarto dia;
- 2970 minutos no total dos m dias.

Determine o valor de m.

3. Na Figura 1, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma reto $[ABCDEFGH]$, de bases $[ABCD]$ e $[EFGH]$.

Sabe-se que:

- as bases do prisma são trapézios retângulos;
- o ponto A tem coordenadas $(4, -4, -3)$, e o ponto B tem a ordenada igual ao dobro da abcissa;
- uma equação da reta BC é $(x, y, z) = (3, 5, 1) + k(2, 3, 6), \quad k \in \mathbb{R}$.

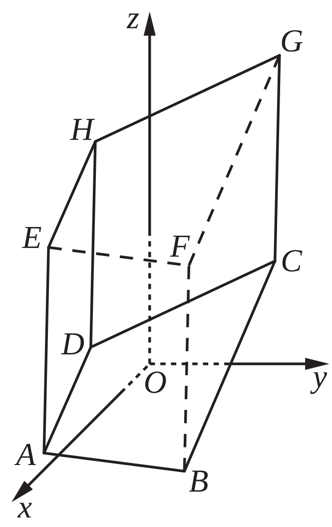

Figura 1

* **3.1.** Qual das equações seguintes é uma equação do plano ABF ?

(A) $2x + 3y + 6z + 22 = 0$ **(B)** $2x + 3y + 6z - 20 = 0$

(C) $3x - 2y - 20 = 0$ **(D)** $3x - 2y + 22 = 0$

* **3.2.** Determine, sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, a amplitude do ângulo convexo AOB.

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

3.3. Selecionam-se, ao acaso, dois vértices de cada uma das bases do prisma.

Determine a probabilidade de os quatro vértices selecionados não pertencerem a uma mesma face lateral do prisma.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

4. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine o conjunto dos números reais que verificam a condição $\ln^2 x - \ln x - 2 < 0$.

Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou de reunião de intervalos de números reais.

5. Considere, para um certo valor de k real, a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{e^{x-1}-1} - e^{x-k} & \text{se } x < 1 \\ \\ x^2 - 3x - 2\ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** sem recorrer à calculadora.

* **5.1.** Estude, no intervalo $]1, +\infty[$, a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

* **5.2.** Sabe-se que a função g é contínua em $x = 1$.

Determine o valor de k.

*** 6.** O gráfico da Figura 2 apresenta a distribuição das classificações finais, em valores, na disciplina de Português, dos 20 alunos de uma turma.

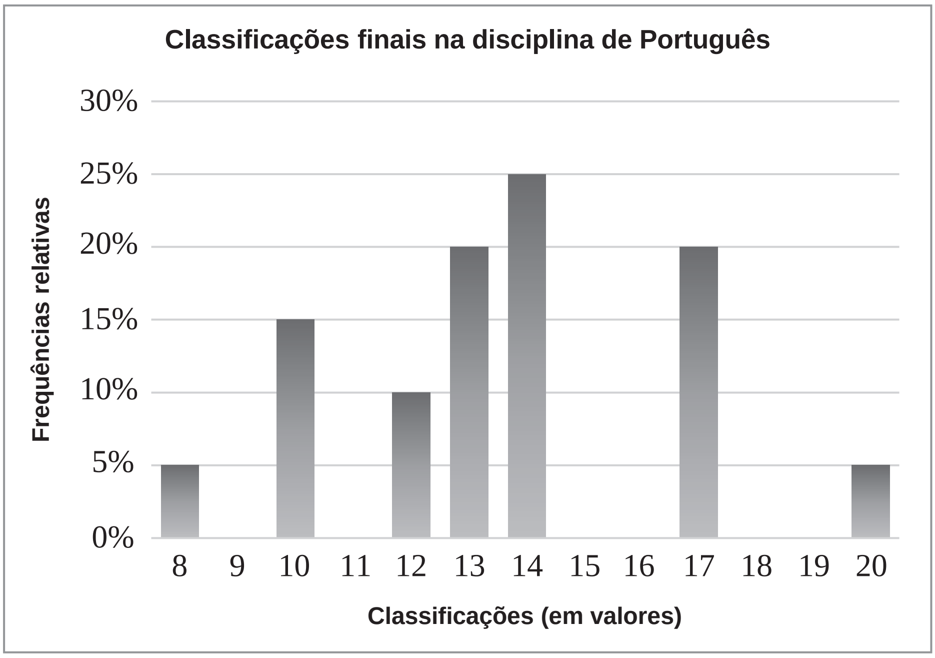

Figura 2

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados representados no gráfico da Figura 2.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Na turma, há ___**I**___ alunos com classificação final inferior a 13 valores na disciplina de Português.

A mediana da distribuição das classificações finais na disciplina de Português é ___**II**___ valores.

A classificação média final na disciplina de Português é ___**III**___ valores, e o desvio padrão desta distribuição, arredondado às décimas, é ___**IV**___ valores.

I	**II**	**III**	**IV**
a) 4	**a)** 12,5	**a)** 13,4	**a)** 2,9
b) 6	**b)** 13	**b)** 13,6	**b)** 3,8
c) 10	**c)** 13,5	**c)** 13,8	**c)** 4,1

7. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^4}$$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais ao seu gráfico e, caso existam, escreva as respetivas equações.

*** 8.** Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- para qualquer número real a, $a \neq 2$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$;
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$, com $f(2) > 0$, e $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$;
- $f(1) \times f(3) < 0$.

Considere as proposições seguintes.

I. O teorema de Bolzano-Cauchy permite afirmar que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]1, 3[$.

II. A reta de equação $x = 2$ é assíntota ao gráfico da função $\frac{1}{f}$.

Justifique que as proposições **I** e **II** são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

9. Na Figura 3, estão representadas, em referencial o.n. Oxy, a circunferência de centro em O e raio 2 e uma região sombreada composta pelo trapézio $[OBCD]$, retângulo em C e em D, e pelo sector circular correspondente ao ângulo orientado AOB, de amplitude α, em radianos, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, e raio $\overline{OA}$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência e ao semieixo positivo Ox;
- os pontos B e C pertencem à circunferência, sendo C o simétrico de B, em relação ao eixo Oy.

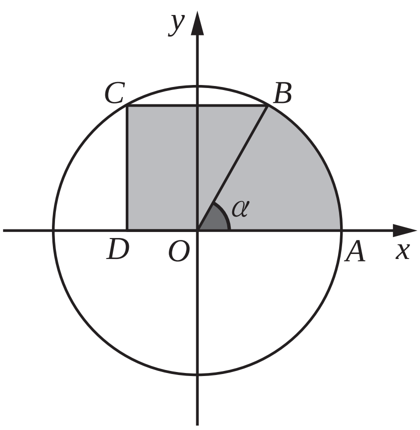

Figura 3

Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de α, pela expressão

$$2\alpha + 3\,\mathrm{sen}\,(2\alpha)$$

10. Na Figura 4, está representada uma caixa que vai ser puxada ao longo de um plano horizontal, com recurso a uma haste rígida.

Nesta figura, o segmento de reta $[AB]$ representa a haste rígida, o ponto A representa o ponto em que a haste está fixada à caixa, e o ponto B representa o ponto em que vai ser exercida a força que permite deslocar a caixa.

Seja θ a amplitude, em radianos, do ângulo que a força faz com a horizontal $\left(\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

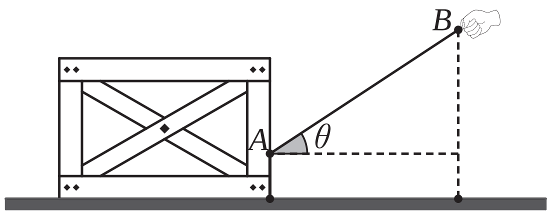

Figura 4

Admita que, para cada valor de θ, a intensidade mínima da força a aplicar no ponto B, para que se inicie o movimento da caixa, é dada, em newton, por

$$F(\theta) = \frac{4095}{5\operatorname{sen}\theta + 12\cos\theta}$$

Existem dois valores distintos de θ aos quais corresponde a mesma intensidade mínima da força, em newton, a aplicar no ponto B, para que se inicie o movimento da caixa.

Sabe-se que um desses valores é o dobro do outro.

Seja θ_1 o menor desses valores $\left(\theta_1 \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\right)$.

Determine, recorrendo à calculadora, o valor de θ_1.

Apresente o resultado em radianos, arredondado às centésimas.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

11. Na Figura 5, está representado, no plano complexo, o triângulo $[ABC]$, cujos vértices pertencem à circunferência de raio 2 centrada na origem do referencial, sendo o ponto A pertencente ao semieixo imaginário negativo.

Os pontos A, B e C são os afixos das raízes cúbicas de um certo número complexo, w.

Em qual das seguintes opções se apresenta w, escrito na forma trigonométrica?

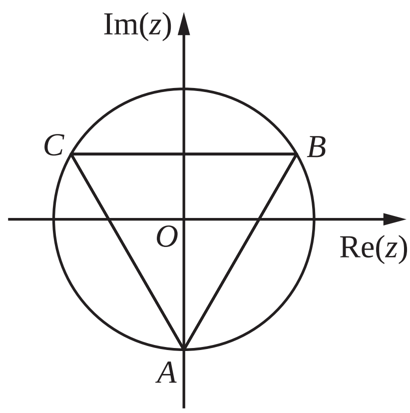

Figura 5

(A) $2e^{i\frac{\pi}{2}}$ **(B)** $2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

(C) $8e^{i\frac{\pi}{2}}$ **(D)** $8e^{i\frac{3\pi}{2}}$

12. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo $z = \dfrac{4}{1+i} - \dfrac{2}{i^7}$.

Determine o número complexo w tal que o número complexo $z \times w$ tenha módulo $5\sqrt{2}$ e afixo pertencente à bissetriz do terceiro quadrante.

Apresente w na forma $a + bi$, com $a , b \in \mathbb{R}$.

* **13.** Para certos valores reais de b e de m , não nulos, a reta de equação $y = mx + 1$ é tangente ao gráfico da função quadrática definida por $f(x) = 2x^2 + bx + 5$ num ponto cuja abcissa é positiva.

Determine a abcissa desse ponto.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**8.**	**10.**	**11.**	**13.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	12	14	14	14	12	14	14	12	14	**158**
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.3.**		**3.3.**		**4.**		**7.**		**9.**		**12.**		**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos												**42**
TOTAL													**200**