Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2022

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\dfrac{\alpha\pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\dfrac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular:

$\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\dfrac{\alpha\pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $Área\ da\ base \times Altura$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:

  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

- **Desvio padrão** de X:

  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

*** 1.** Uma empresa do sector dos lanifícios produz dois tipos de tecido: TA e TB.

A produção de cada rolo de tecido TA necessita de 1 hora no tanque de lavagem, 1 hora na banca de coloração e 4 horas na máquina de acabamento.

A produção de cada rolo de tecido TB necessita de 2 horas no tanque de lavagem, 1 hora na banca de coloração e 1 hora na máquina de acabamento.

Para a produção dos rolos destes dois tipos de tecido, a empresa dispõe de 160 horas no tanque de lavagem, 100 horas na banca de coloração e 280 horas na máquina de acabamento.

A empresa tem assegurados o lucro de 120 euros por cada rolo de tecido TA produzido e o lucro de 80 euros por cada rolo de tecido TB produzido.

Determine quantos rolos de tecido TA e quantos rolos de tecido TB a empresa deve produzir para obter o lucro total máximo na produção destes tecidos.

Na sua resposta, designe por x o número de rolos de tecido TA e por y o número de rolos de tecido TB a produzir pela empresa, e apresente:

– a função objetivo;

– as restrições do problema;

– uma representação gráfica referente ao sistema de restrições;

– o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

2. No âmbito do desporto escolar, a Leonor completou uma prova de corta-mato em $15{,}3$ minutos, num circuito previamente demarcado no terreno.

Seja d a função que dá a distância em linha reta, em metros, da Leonor ao ponto de partida, t minutos após o início da sua prova, até cruzar a meta.

Admita que d pode ser definida por

$$d(t) = 0{,}02t\,(0{,}6t - 9)^2\,(0{,}4t - 4)^2\,e^{0{,}45t} \quad , \text{ com } \quad 0 \leq t \leq 15{,}3$$

*** 2.1.** Determine a distância em linha reta da meta ao ponto de partida.

Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

Se proceder a cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

*** 2.2.** Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, durante quanto tempo da prova é que a distância em linha reta da Leonor ao ponto de partida foi superior a 154 metros.

Apresente o resultado em minutos e segundos, com os segundos arredondados às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2.3. Seja V a função que dá a taxa de variação instantânea da função d, para cada valor de t.

Interprete, no contexto descrito, o significado de $V(11) \approx 58{,}4$.

3. A Leonor decidiu construir um castelo com cartas de jogar, tal como mostra a Figura 1.

Para o fazer, a Leonor procedeu do seguinte modo:

- na primeira fila, colocou 20 cartas inclinadas e 9 cartas horizontais;
- na segunda fila, colocou 18 cartas inclinadas e 8 cartas horizontais;
- na terceira fila, colocou 16 cartas inclinadas e 7 cartas horizontais;
- e assim sucessivamente, até à décima fila, em que colocou apenas 2 cartas inclinadas.

Figura 1

* **3.1.** Considere a sequência em que cada termo é o número de cartas colocadas em cada fila, da primeira à décima.

Justifique que os termos desta sequência são termos consecutivos de uma progressão aritmética.

Na sua resposta, indique a razão dessa progressão.

3.2. A construção completa de qualquer castelo de cartas deste tipo termina sempre com a fila que tem apenas 2 cartas, independentemente do número de filas do castelo.

Se a Leonor conseguisse construir um destes castelos com 100 filas, quantas cartas teria de utilizar?

Justifique a sua resposta.

4. O avô da Leonor vai construir, no seu jardim, um pequeno canteiro retangular.

A área, A, em metros quadrados, do canteiro, em função da medida, x, em metros, de um dos lados, é dada por

$$A(x) = 6x - x^2 \quad , \text{ com } 0 < x < 6$$

4.1. Determine o perímetro do canteiro que o avô da Leonor vai construir.

Na sua resposta, comece por obter uma expressão para a medida do outro lado do retângulo, em função de x.

* **4.2.** Determine a área máxima que o canteiro pode ter.

Apresente o resultado em metros quadrados.

5. Numa escola, foi registado o peso*, em quilogramas, das mochilas dos alunos que frequentam o 2.º ano de escolaridade. Os dados foram organizados no histograma representado na Figura 2.

* A palavra «peso» é utilizada na sua aceção corrente, como sinónimo de massa.

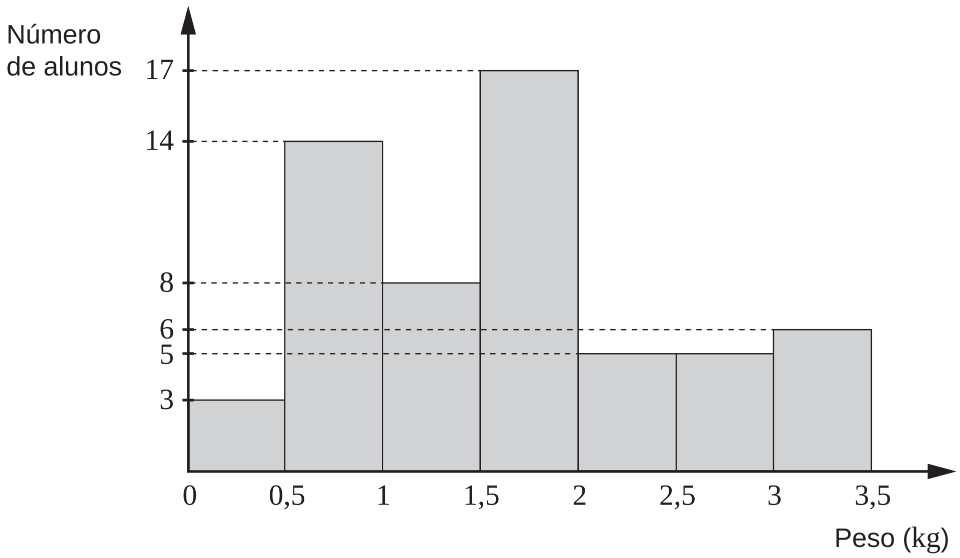

Figura 2

Determine, de acordo com o histograma, a média dos pesos das mochilas dos alunos do 2.º ano de escolaridade dessa escola.

Apresente o resultado em quilogramas, arredondado às centésimas.

6. A Organização Mundial da Saúde (OMS) recomenda que as crianças e os jovens em idade escolar (dos 6 aos 18 anos) não carreguem mochilas cujo peso* exceda 10% do peso do seu corpo.

* A palavra «peso» é utilizada na sua aceção corrente, como sinónimo de massa.

Admita que o peso dos alunos que frequentam o 1.º ano de escolaridade de uma escola segue, aproximadamente, uma distribuição normal de valor médio 22 quilogramas e desvio padrão 1 quilograma.

Num certo dia, foi necessário transportar uma mochila com o peso de $2,4$ quilogramas para a biblioteca. Foi indicado, ao acaso, um aluno do 1.º ano para transportar essa mochila.

Determine a probabilidade de não ter sido respeitada a recomendação da OMS nesta situação.

Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

7. A calçada portuguesa é uma forma de arte urbana em que os motivos geométricos são muito utilizados.

A fotografia da Figura 3 mostra parte do pavimento de um passeio em calçada portuguesa, cujo desenho é obtido a partir de uma composição de semicircunferências. Estas têm raios iguais e encontram-se dispostas em colunas, como sugere o esquema da Figura 4.

Figura 3

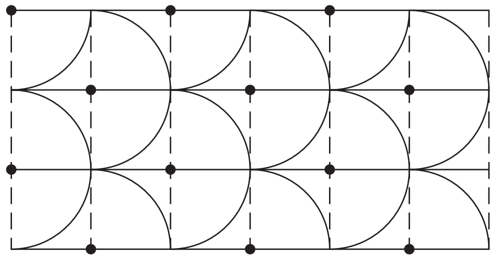

Figura 4

No esquema da Figura 4:

- em cada coluna, estão representadas uma semicircunferência e metade de outra semicircunferência, tangentes entre si, com os centros assinalados e alguns raios representados a traço interrompido;
- a semicircunferência que pertence a uma dada coluna, exceto a primeira, tem um dos seus pontos extremos sobre o ponto médio da semicircunferência da coluna imediatamente à esquerda.

Admita que o raio de cada semicircunferência do pavimento mede 20 cm.

* **7.1.** A Figura 5 representa parte do pavimento daquele passeio.

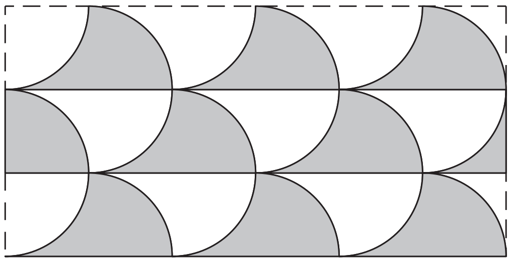

Figura 5

Determine a área da região representada a sombreado na Figura 5.

Apresente o resultado em centímetros quadrados.

7.2. Num dos motivos utilizados no pavimento, esquematizado na Figura 5, fixou-se um referencial ortogonal e monométrico, Oxy, como se representa na Figura 6.

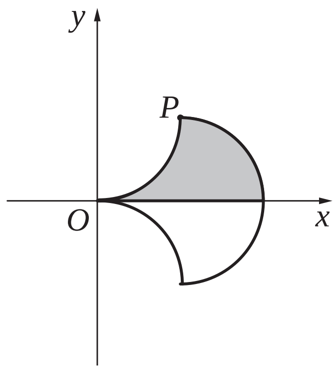

Figura 6

Nesta figura:

- o ponto P é um dos extremos do diâmetro da semicircunferência;
- o centro da semicircunferência pertence ao semieixo positivo Ox;
- o ponto O é o ponto de tangência de dois arcos contidos nas duas semicircunferências cujos centros pertencem ao eixo Oy.

No referencial, a unidade é o centímetro.

Seja Q o transformado do ponto P pela rotação de centro no ponto O e de amplitude $-585°$.

Determine as coordenadas exatas do ponto Q.

Na sua resposta, comece por indicar as coordenadas do ponto P.

8. No verão passado, o João esteve a observar os pássaros que voavam perto da casa do avô.

Um pássaro descrevia um voo horizontal em linha reta quando, em certo momento, observou um alimento no ramo de uma árvore, à mesma altura do voo que estava a efetuar. Para se aproximar do alimento, o pássaro descreveu, no mesmo plano horizontal, um arco de circunferência.

A situação, vista de cima, está representada no esquema da Figura 7. Nesta figura, que não está à escala:

- o segmento de reta $[AB]$ representa o voo inicial do pássaro, em linha reta;
- o ponto C representa a localização do alimento;
- o ponto O representa o centro da circunferência que contém o arco BC descrito pelo pássaro;
- a circunferência de centro O é tangente à reta AB no ponto B;
- r é o raio da circunferência, em metros;
- α é a amplitude, em graus, do ângulo agudo que a reta AB faz com o segmento de reta $[BC]$;
- d é a distância de B a C, em metros.

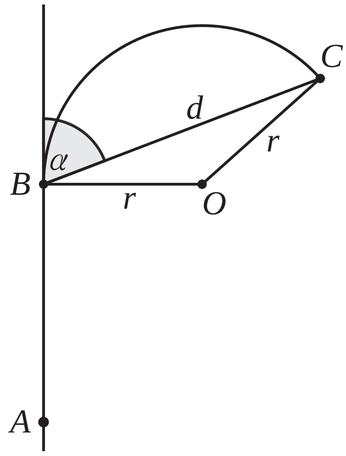

Figura 7

8.1. Mostre que $r = \dfrac{d}{2\,\text{sen}\,\alpha}$.

Na sua resposta, comece por decompor o triângulo $[BOC]$ pela altura relativa a $[BC]$.

8.2. Na parte do voo em linha reta, o pássaro percorreu 12 metros.

Relativamente à parte do voo em que descreveu o arco de circunferência, sabe-se que $r = 10\text{ m}$ e $d = 18\text{ m}$.

Determine a distância total percorrida pelo pássaro.

Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Note que $r = \dfrac{d}{2\,\text{sen}\,\alpha}$.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.**	**7.1.**	**8.1.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	20	16	20	16	16	16	16	16	16	**152**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.3.**	**3.2.**	**4.1.**	**7.2.**	**8.2.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 16 pontos									**48**
TOTAL										**200**