

Exame Final Nacional de Matemática A
Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2022
12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Critérios de Classificação

11 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a pontuação só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1.1. 12 pontos
Opção (B)

1.2. 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que o plano LEF é paralelo ao plano BCJ 1 ponto

Reconhecer que o vetor de coordenadas $(3, -\sqrt{3}, 0)$ é normal ao plano LEF 1 ponto

Reconhecer que $L = B + 2\overrightarrow{BM}$ 2 pontos

Reconhecer que o ponto B tem ordenada e cota nulas 1 ponto

Determinar a abcissa do ponto B 2 pontos

Determinar as coordenadas do ponto L 2 pontos

Escrever $3x - \sqrt{3}y + d = 0$ 2 pontos

Escrever $3 \times \frac{2}{3} - \sqrt{3} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} + d = 0$ 1 ponto

Obter o valor de d 1 ponto

Escrever uma equação do plano na forma pedida ($3x - \sqrt{3}y + 2 = 0$ ou equivalente) 1 ponto

2.º Processo

Seja P a projeção ortogonal do ponto M no plano xOy .

Reconhecer que o plano LEF é paralelo ao plano BCJ 1 ponto

Reconhecer que o vetor de coordenadas $(3, -\sqrt{3}, 0)$ é normal ao plano LEF 1 ponto

Reconhecer que $E = P + 2\overrightarrow{BP}$ 2 pontos

Reconhecer que o ponto B tem ordenada e cota nulas 1 ponto

Determinar a abcissa do ponto B 2 pontos

Determinar as coordenadas do ponto E 2 pontos

Escrever $3x - \sqrt{3}y + d = 0$ 2 pontos

Escrever $3 \times \frac{2}{3} - \sqrt{3} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} + d = 0$ 1 ponto

Obter o valor de d 1 ponto

Escrever uma equação do plano na forma pedida ($3x - \sqrt{3}y + 2 = 0$ ou equivalente) 1 ponto

2.	14 pontos
Reconhecer que o ângulo ABC é reto	1 ponto
Reconhecer que $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2}$	1 ponto
Reconhecer que $\cos \alpha = \frac{\overline{AB}}{4}$	2 pontos
Obter $\overline{AB} = 4 \cos \alpha$	1 ponto
Reconhecer que $\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{4}$	2 pontos
Obter $\overline{BC} = 4 \sin \alpha$	1 ponto
Escrever $A_{[ABC]} = \frac{4 \cos \alpha \times 4 \sin \alpha}{2}$	1 ponto
Obter $A_{[ABC]} = 8 \sin \alpha \cos \alpha$	1 ponto
Obter $A_{[ABC]} = 4 \sin (2\alpha)$	2 pontos
Obter a área do semicírculo (2π)	1 ponto
Concluir o pretendido	1 ponto

3. **12 pontos**
 Opção (D)

4. **14 pontos**

Tópicos de resposta

- A)** Enunciado da regra de Laplace: quando os casos possíveis são equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis.
- B)** Explicação do número de casos possíveis: é o número de conjuntos de quatro funcionários que é possível formar.
- C)** Explicação do número de casos favoráveis: selecionar, ao acaso, no máximo, três funcionários que trabalham em regime presencial, pelo menos, dois dias por semana é o contrário de selecionar, ao acaso, quatro funcionários que trabalham em regime presencial, pelo menos, dois dias por semana; assim, o número de casos favoráveis é igual à diferença entre o número de casos possíveis e o número de conjuntos de quatro funcionários que é possível formar, selecionados de entre os 45 (75% de 60) que trabalham em regime presencial, pelo menos, dois dias por semana.

Níveis	Descritores de desempenho	Pontuação
6	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.	14
5	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com falhas na utilização do vocabulário específico da Matemática.	13
4	Na resposta, são contemplados apenas dois tópicos, com utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.	9
3	Na resposta, são contemplados apenas dois tópicos, com falhas na utilização do vocabulário específico da Matemática.	8
2	Na resposta, é contemplado apenas um tópico, com utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.	4
1	Na resposta, é contemplado apenas um tópico, com falhas na utilização do vocabulário específico da Matemática.	3

5. 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

- Utilizar a fórmula da probabilidade condicionada 4 pontos
- Utilizar a igualdade $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ 3 pontos
- Aplicar a propriedade da probabilidade do acontecimento contrário 3 pontos
- Concluir que a igualdade é verdadeira 4 pontos

2.º Processo

- Utilizar a igualdade $P(B|A) = P(B)$ 7 pontos
- Aplicar a propriedade da probabilidade do acontecimento contrário 3 pontos
- Concluir que a igualdade é verdadeira 4 pontos

6. 12 pontos

Opção (C)

7. 14 pontos

Nota prévia – Se for considerada uma progressão geométrica, em vez de uma progressão aritmética, a classificação a atribuir à resposta é 0 pontos.

Seja r a razão da progressão aritmética (v_n) .

- Reconhecer que $v_{10} = v_3 + 7r$ 2 pontos
- Reconhecer que $v_9 = v_3 + 6r$ 2 pontos
- Obter $v_3 + 7r = \frac{5}{4}(v_3 + 6r)$ (ou equivalente) 2 pontos
- Obter $r = -\frac{1}{2}$ 1 ponto
- Obter $v_n = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}n$ 3 pontos
- Escrever $\frac{5}{2} - \frac{1}{2}n = -50$ (ou equivalente) 2 pontos
- Obter $n = 105$ 1 ponto
- Concluir que -50 é termo da progressão (v_n) 1 ponto

8. 12 pontos

Opção (A)

9. 14 pontos

- Substituir i^7 por $-i$ 1 ponto
- Obter $(1+i)^2 = 2i$ 1 ponto
- Obter $z_1 = -2 + 3i$ 2 pontos
- Escrever $z_2 = \frac{3+2i}{z_1}$ (ou equivalente) 2 pontos
- Obter $z_2 = -i$ 3 pontos
- Obter o valor pedido (π) 5 pontos

Esta etapa pode ser cumprida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

- Escrever $\sin \theta = 0 \wedge \cos \theta = -1$ (ou equivalente) 3 pontos
- Concluir que $\theta = \pi$ 2 pontos

2.º Processo

- Reconhecer que $z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ 2 pontos
- Reconhecer que $z_2 = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ 1 ponto
- Concluir que $\theta = \pi$ 2 pontos

10. 14 pontos

- Reconhecer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{e^{5x}-1} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x}-1}{3x} \right)^{-1}$ 2 pontos
- Escrever $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x}-1}{3x} = \frac{5}{3} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x}-1}{5x}$ 2 pontos
- Escrever $\frac{5}{3} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x}-1}{5x} = \frac{5}{3} \times \lim_{y=5x} \frac{e^y-1}{y}$ 2 pontos
- Escrever $\frac{5}{3} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y-1}{y} = \frac{5}{3}$ 2 pontos
- Escrever $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{e^{5x}-1} = \frac{3}{5}$ 1 ponto
- Referir que $f(0) = \frac{3}{5}$ 2 pontos
- Reconhecer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3}{5}$ 1 ponto
- Concluir que a função f é contínua em $x = 0$ 2 pontos

11.1. 14 pontos

Determinar uma equação da assíntota oblíqua 8 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^x) - x}{x}$ 1 ponto

Escrever $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^x) - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\ln(1 + e^x)}{x} - 1 \right)$... 1 ponto

Escrever $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\ln(1 + e^x)}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} - 1$ 1 ponto

Determinar $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}$ 1 ponto

Obter $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = -1$ 1 ponto

Escrever $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(1 + e^x) - x + x)$ 1 ponto

Obter $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) + x) = 0$ 1 ponto

Concluir que uma equação da assíntota oblíqua é $y = -x$ 1 ponto

Determinar uma equação da assíntota horizontal 6 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^x) - x)$ 1 ponto

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^x) - \ln e^x)$.. 1 ponto

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^x) - \ln e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\frac{1 + e^x}{e^x} \right) \right)$.. 1 ponto

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\frac{1 + e^x}{e^x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\frac{1}{e^x} + 1 \right) \right)$ 1 ponto

Obter $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ 1 ponto

Concluir que uma equação da assíntota horizontal é $y = 0$ 1 ponto

11.2. 14 pontos

Identificar o declive da reta r com $g'(0)$ 2 pontos

Determinar $g'(0)$ (**ver nota**) 5 pontos

Obter uma expressão de $g'(x)$ 3 pontos

Obter $g'(0)$ 2 pontos

Calcular $g(0)$ 1 ponto

Escrever a equação reduzida da reta r 2 pontos

Obter \overline{OA} e \overline{OB} 2 pontos

Concluir o pretendido 2 pontos

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função g , a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

12.1. 12 pontos

Opção (A)

12.2. 14 pontos

Reconhecer que as coordenadas do ponto C são $(0, (m+1)^2)$ 1 ponto

Reconhecer que a altura do triângulo $[ABC]$ relativa a $[BC]$ é $(m+1)^2 - 1$.. 2 pontos

Apresentar a equação $\frac{(m+1)((m+1)^2 - 1)}{2} = 4$ (ou uma equação equivalente) (ver notas 1 e 2) 4 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (ver nota 3) 4 pontos

Apresentar a abcissa do ponto relevante 2 pontos

Apresentar o valor de m na forma pedida $(1,17)$ 1 ponto

Notas:

1. Se a equação apresentada não traduzir corretamente o problema, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho, desde que seja inequívoco que correspondem à resolução da equação que traduz corretamente o problema.
3. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

13. 14 pontos

Determinar $g''(x)$ (ver nota 1) 4 pontos

Determinar o zero de g'' 4 pontos

Escrever $g''(x) = 0$ 1 ponto

Obter o zero de g'' 3 pontos

Apresentar um quadro de sinal de g'' e de sentido da concavidade do gráfico de g (ou equivalente) 3 pontos

Referir que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima em $\left]0, \frac{1}{3}\right]$ (ver nota 2) 1 ponto

Referir que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$ (ver nota 3) 1 ponto

Indicar a abcissa do ponto de inflexão do gráfico da função $g\left(\frac{1}{3}\right)$ 1 ponto

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a segunda derivada da função g , a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.
2. Se for referido que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima em $\left]0, \frac{1}{3}\right]$, em vez de em $\left]0, \frac{1}{3}\right[$, esta etapa deve ser considerada cumprida.
3. Se for referido que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$, em vez de em $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$, esta etapa deve ser considerada cumprida.

14. 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

- Determinar o domínio da condição 4 pontos
- Escrever $\log_2(9x + 1) = 2 \log_2(6x)$ 1 ponto
- Obter $\log_2(9x + 1) = \log_2(6x)^2$ 3 pontos
- Obter $9x + 1 = (6x)^2$ 1 ponto
- Resolver a equação $9x + 1 = (6x)^2$ 3 pontos
- Apresentar o conjunto pedido $\left(\left\{\frac{1}{3}\right\}\right)$ 2 pontos

2.º Processo

- Determinar o domínio da condição 4 pontos
- Obter $\log_2 \sqrt{9x + 1} = \log_2(6x)$ 3 pontos
- Obter $\sqrt{9x + 1} = 6x$ 1 ponto
- Resolver a equação $\sqrt{9x + 1} = 6x$ 4 pontos
- Apresentar o conjunto pedido $\left(\left\{\frac{1}{3}\right\}\right)$ 2 pontos

15. 14 pontos

- Determinar $f'(x)$ (**ver nota**) 2 pontos
- Determinar o zero de f' 2 pontos
- Apresentar um quadro de sinal de f' e de monotonia de f (ou equivalente) .. 3 pontos
- Determinar $f\left(\frac{4}{k}\right)$ 1 ponto
- Referir que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ou que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 2 pontos
- Referir que a função f é contínua em $]0, +\infty[$ 2 pontos
- Apresentar o contradomínio da função f ($[2 - \ln 4, +\infty[$) 2 pontos

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função f , a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.1.	1.2.	3.	4.	6.	8.	10.	11.1.	12.1.	12.2.	13.	15.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	12	14	14	14	158
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	2.		5.		7.		9.		11.2.		14.		Subtotal
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos												42
TOTAL													200