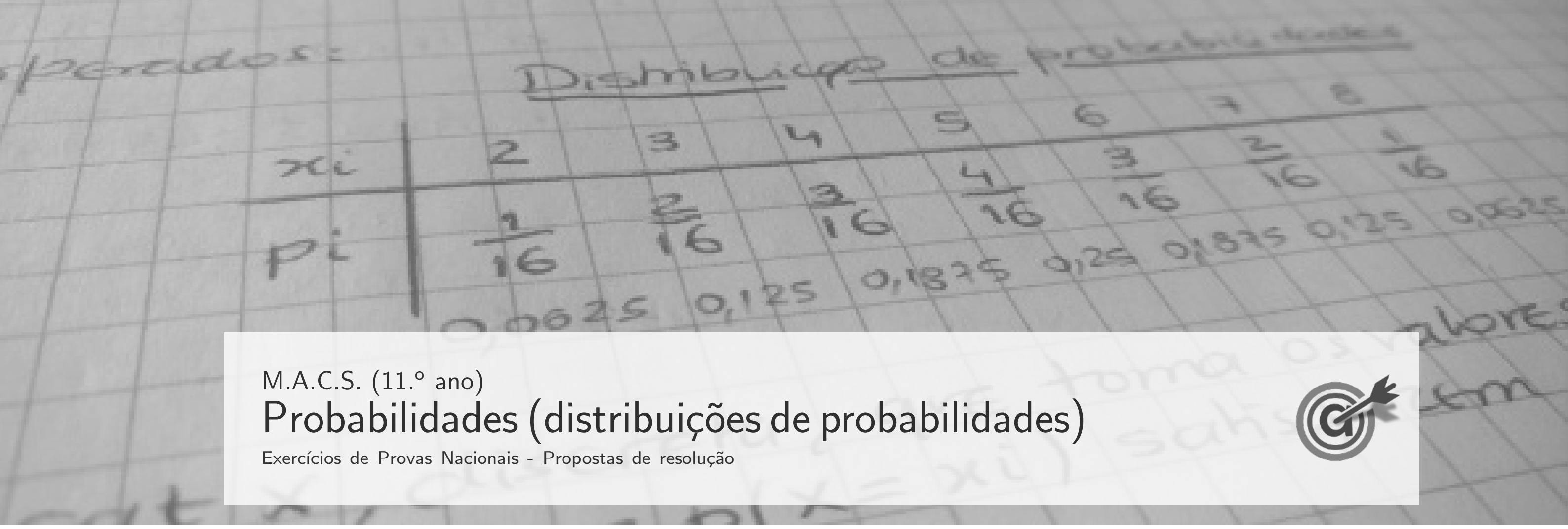

M.A.C.S. (11.º ano)

Probabilidades (distribuições de probabilidades)

Exercícios de Provas Nacionais - Propostas de resolução

1. Como X é número de vezes em que a roleta para num sector colorido a cinzento, e a roleta é rodada por duas vezes, a variável X pode tomar os seguintes valores, com as respetivas probabilidades:

   - $X = 0$, se nunca sair um setor colorido a cinzento, ou seja, sair um setor colorido a branco nas duas vezes em que a roleta é colocada a rolar:

   $$P(X = 0) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$$

   - $X = 1$, se sair um setor colorido a cinzento numa das vezes em que a roleta é colocada a rolar, ou seja, apenas na primeira vez, ou, apenas na segunda vez:

   $$P(X = 1) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{64} + \frac{15}{64} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$$

   - $X = 2$, se sair um setor colorido a cinzento nas duas vezes em que a roleta é colocada a rolar:

   $$P(X = 0) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$$

   Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X, com os valores na forma de fração irredutível, é:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{25}{64}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{9}{64}$

Exame – 2017, 2.ª Fase

2. Como se admita que já foram selecionados quatro juniores e um sénior, faltando selecionar apenas sexto jurado, a variável X pode tomar os valores 4 ou 5.

   Assim, temos que, para a seleção do sexto jurado, como já foram selecionados 5 candidatos (4 juniores e 1 sénior) existem:

   - $10+6+4+10-5=25$ candidatos possíveis,
   - $10+4-4=10$ juniores,
   - $6+10-1=15$ seniores.

   Assim, temos que:

   - A probabilidade do sexto jurado selecionado ser sénior, é $P(X=4)=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$
   - A probabilidade do sexto jurado selecionado ser júnior, é $P(X=5)=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$

   Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X, com os valores na forma de fração irredutível, é:

x_i	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

Exame – 2016, 2.ª Fase

3. Temos que o número total de inquéritos é 200 e o número de encartados que realizaram 2 exames é 50.

   Assim, como são escolhidos dois dos encartados, a variável X pode assumir os valores zero (nenhum dos dois encartados realizou 2 exames); 1 (um dos dois encartados realizou 2 exames) ou 2 (ou dois encartados realizaram 2 exames), e as respetivas probabilidades, na forma de dízima, arredondadas às centésimas, são:

   - $P(X=0)=\frac{150}{200}\times\frac{149}{199}\approx 0{,}56$ (escolhendo dois dos 150 encartados que não realizaram 2 exames)
   - $P(X=1)=\frac{150}{200}\times\frac{50}{199}+\frac{50}{200}\times\frac{150}{199}\approx 0{,}38$ (escolhendo um dos 150 encartados que não realizaram 2 exames e depois um dos 50 que realizaram dois exames ou então, a mesma escolha por ordem inversa)
   - $P(X=2)=\frac{50}{200}\times\frac{49}{199}\approx 0{,}06$ (escolhendo dois dos 50 encartados que realizaram 2 exames)

   Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X, é:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	0,56	0,38	0,06

Exame – 2015, 1.ª Fase

4. Como $P(X\geq 1)=0{,}995$, temos que:

   - $a=P(X=0)=P(X<1)=1-P(X\geq 1)=1-0{,}995=0{,}005$
   - $P(X\geq 1)=0{,}995 \Leftrightarrow P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0{,}995 \Leftrightarrow 0{,}425+b+0{,}120=0{,}995 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow b=0{,}995-0{,}425-0{,}120 \Leftrightarrow b=0{,}45$$

Exame – 2011, 2.ª Fase

5. Como a Vanda seleciona dois livros, e existem mais do que dois livros policiais, a variável X pode tomar os valores:

   - zero, se a Vanda selecionar dois livros de aventuras;
   - um, se a Vanda selecionar um livro de aventuras e outro policial;
   - dois, se a Vanda selecionar dois livros policiais.

   Desta forma, a probabilidade associada a cada valor da variável X, é:

   - $P(X=0) = \frac{20}{35} \times \frac{19}{34} = \frac{38}{119}$ (escolhendo dois dos 20 livros de aventuras)
   - $P(X=1) = \frac{20}{35} \times \frac{15}{34} + \frac{15}{35} \times \frac{20}{34} = \frac{60}{119}$ (escolhendo um dos 20 livros de aventuras e depois um dos 15 policiais ou então, a mesma escolha por ordem inversa)
   - $P(X=2) = \frac{15}{35} \times \frac{14}{34} = \frac{21}{119}$ (escolhendo dois 15 livros policiais)

   Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X, com os valores na forma de fração, é:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{38}{119}$	$\frac{60}{119}$	$\frac{21}{119}$

Exame – 2008, 2.ª Fase

ITENS SELECIONADOS DE EXAMES E TESTES INTERMÉDIOS DE MATEMÁTICA A

6. Organizando todas as somas possíveis numa tabela, temos:

	-1	1	1	1	1	1
-1	-2	0	0	0	0	0
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2

   Logo, pela observação da tabela, podemos observar os valores possíveis para a soma e as respetivas probabilidades:

   - $P(X=-2) = \frac{1}{36}$
   - $P(X=0) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$
   - $P(X=2) = \frac{25}{36}$

   Assim, temos que $P(X=k) = \frac{5}{18}$, para $k=0$

   Resposta: **Opção A**

Exame – 2019, 1.ª Fase

7. Organizando todos os produtos possíveis numa tabela, temos:

1.ª bola \ 2.ª bola	0	1	2	3
0	−	0	0	0
1	0	−	2	3
2	0	2	−	6
3	0	3	6	−

Assim podemos observar que os valores que a variável X pode assumir são $k = 0$, ou $k = 2$, ou $k = 6$
Pela observação da tabela temos que: $P(X = 0) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, pelo que $k = 0$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2018, 1.ª Fase

8. Como X é o número de bolas retiradas da caixa, até ser retirada uma bola preta, a variável X pode tomar os seguintes valores, com as respetivas probabilidades:

- $X = 1$, se a primeira bola retirada for preta
$P(X = 1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
- $X = 2$, se a primeira não for preta e a segunda sim, sabendo que a primeira que foi retirada não era preta $P(X = 2) = \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
- $X = 3$, se a primeira não for preta, a segunda também não, sabendo que a primeira também não foi e a terceira ser preta, sabendo que as duas anteriores não o eram
$P(X = 3) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{6}{7} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{3 \times 2}{7} = \frac{2}{4 \times 7} = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$
- $X = 4$ se saírem sucessivamente as três bolas que não são pretas, pelo que a quarta bola será necessariamente uma bola preta
$P(X = 4) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{84}$

Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{84}$

Exame – 2014, 1.ª Fase

9. Como no saco estão 5 bolas e extraímos 4, temos apenas 5 conjuntos de bolas que podem ser extraídos:

- bolas com os números $\{-2, -1,0,1\}$, produto correspondente: $-2 \times (-1) \times 0 \times 1 = 2 \times 0 = 0$
- bolas com os números $\{-2, -1,0,2\}$, produto correspondente: $-2 \times (-1) \times 0 \times 2 = 4 \times 0 = 0$
- bolas com os números $\{-2, -1,1,2\}$, produto correspondente: $-2 \times (-1) \times 1 \times 2 = 4$
- bolas com os números $\{-2,0,1,2\}$, produto correspondente: $-2 \times 0 \times 1 \times 2 = -4 \times 0 = 0$
- bolas com os números $\{-1,0,1,2\}$, produto correspondente: $-1 \times 0 \times 1 \times 2 = -2 \times 0 = 0$

Ou seja, os produtos possíveis são apenas 0 e 4.
Quando a bola com o número 0 é extraída, o que acontece 4 em cada 5 vezes, o produto é 0, ou seja, $P(X = 0) = \frac{4}{5}$
Quando a bola com o número 0 não é extraída, o que acontece 1 em cada 5 vezes, o produto é 4, ou seja, $P(X = 4) = \frac{1}{5}$

Exame – 2012, 1.ª Fase

10. Como $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 2a + a = 3a$ e $P(X=5) = \frac{1}{10}$, temos que:

$$P(X \leq 1) = 3P(X=5) \Leftrightarrow 3a = 3 \times \frac{1}{10} \Leftrightarrow a = \frac{1}{10}$$

Também sabemos que:

$$2a + a + b + b + b + \frac{1}{10} = 1 \Leftrightarrow 3a + 3b = 1 - \frac{1}{10} \Leftrightarrow 3a + 3b = \frac{10}{10} - \frac{1}{10} \Leftrightarrow 3a + 3b = \frac{9}{10}$$

Substituindo o valor de a, temos:

$$3 \times \frac{1}{10} + 3b = \frac{9}{10} \Leftrightarrow 3b = \frac{9}{10} - \frac{3}{10} \Leftrightarrow 3b = \frac{6}{10} \Leftrightarrow b = \frac{\frac{6}{10}}{3} \Leftrightarrow b = \frac{6}{30} \Leftrightarrow b = \frac{1}{5}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2011, 2.ª Fase

11. Como a soma das probabilidades é igual a 1, temos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + a = 1 \Leftrightarrow a = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = \frac{6}{6} - \frac{3}{6} - \frac{2}{6} \Leftrightarrow a = \frac{1}{6}$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 26.05.2011

12. Como são retiradas duas bolas da caixa, no final podem estar fora da caixa 0 bolas (se tiverem sido retiradas duas bolas brancas); 1 bola (se uma das bolas retiradas for preta - ou a primeira ou a segunda) ou 2 bolas (se as duas bolas retiradas forem pretas).

Calculando as 3 probabilidades, temos:

- Retirar a primeira bola branca, e a segunda também sabendo que a primeira foi reposta:
$P(X=0) = \frac{4}{8} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- Retirar a primeira bola branca, e a segunda preta sabendo que a primeira foi reposta, ou, retirar a primeira bola preta e a segunda branca sabendo que a primeira não foi reposta:
$P(X=1) = \frac{4}{8} \times \frac{4}{8} + \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{4} + \frac{4}{14} = \frac{7}{28} + \frac{8}{28} = \frac{15}{28}$
- Retirar a primeira bola preta, e a segunda também sabendo que a primeira não foi reposta:
$P(X=2) = \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$

Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$

Teste Intermédio 12.º ano – 19.01.2011

13. Organizando todas as somas possíveis numa tabela, temos:

Dado B \ Dado A	0	0	0	0	-1	-2
-1	-1	-1	-1	-1	-2	-3
1	1	1	1	1	0	-1
1	1	1	1	1	0	-1
1	1	1	1	1	0	-1
1	1	1	1	1	0	-1
1	1	1	1	1	0	-1

Logo, pela observação da tabela, podemos observar os valores possíveis para a soma e as respetivas probabilidades:

- $P(X=-3) = \frac{1}{36}$
- $P(X=-2) = \frac{1}{36}$
- $P(X=-1) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
- $P(X=0) = \frac{5}{36}$
- $P(X=1) = \frac{4 \times 5}{36} = \frac{4 \times 5}{4 \times 9} = \frac{5}{9}$

E assim, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	-3	-2	-1	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{9}$

Exame – 2010, 2.ª Fase

14. Como a soma das probabilidades é 1, temos que:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + 2a + a = 1 \Leftrightarrow 3a = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3a = \frac{10}{10} - \frac{2}{10} - \frac{5}{10} \Leftrightarrow 3a = \frac{3}{10} \Leftrightarrow a = \frac{3}{30} \Leftrightarrow a = \frac{1}{10}$$

Logo, temos que $P(X=2) = 2 \times \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, e assim

$$P(X=0) = P(X=2) = \frac{1}{5}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2010, 1.ª Fase

15. Organizando todos os produtos possíveis numa tabela, temos:

Bolas	0	0	0	1	1	2
0	–	0	0	0	0	0
0	–	–	0	0	0	0
0	–	–	–	0	0	0
1	–	–	–	–	1	2
1	–	–	–	–	–	2
2	–	–	–	–	–	–

Logo, pela observação da tabela, podemos observar os valores possíveis para a produto e as respetivas probabilidades:

- $P(X=0) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$
- $P(X=1) = \frac{1}{15}$
- $P(X=2) = \frac{2}{15}$

E assim, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2010

16. Como a soma das probabilidades é 1, temos que:

$$\frac{k}{8}+\frac{1}{4}+\frac{k}{4}=1 \Leftrightarrow \frac{k}{8}+\frac{2}{8}+\frac{2k}{8}=\frac{8}{8} \Leftrightarrow k+2+2k=8 \Leftrightarrow 3k=8-2 \Leftrightarrow k=\frac{6}{3} \Leftrightarrow k=2$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2009, 1.ª Fase

17. Como a soma das probabilidades é 1, temos que:

$$\frac{3}{n}+\frac{4}{n}+\frac{5}{n}=1 \Leftrightarrow \frac{12}{n}=1 \Leftrightarrow 12=n$$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12.º ano – 11.03.2009

18. Analisando produtos dos números das seis faces do dado, temos que o zero está em 4 faces do cubo, pelo que o produto é zero, 4 em cada 6 lançamentos do dado. Ou seja a probabilidade é $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

A face com os números "1-1-1"corresponde a um produto 1, que ocorre 1 em cada 6 lançamentos do dado.

A face com os números "2-2-2"corresponde a um produto 8, que também ocorre 1 em cada 6 lançamentos do dado.

Assim, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	8
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Teste Intermédio 12.º ano – 10.12.2008

19. Como extraímos uma bola de um conjunto de dez, e só existem bolas com os números 1, 2, e 3, e a variável X é o número da bola extraída, vem que:

- $P(X = 1) = \frac{4}{10} = 0{,}4$
- $P(X = 2) = \frac{5}{10} = 0{,}5$
- $P(X = 3) = \frac{1}{10} = 0{,}1$

Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,4	0,5	0,1

Teste Intermédio 12.º ano – 07.12.2006

20. Como o dado cúbico tem 6 faces e o dado octaédrico tem 8 faces, podemos fazer $6 \times 8 = 48$ pares de faces, equiprováveis, usando uma face de cada dado.

Destas 48, apenas 4 correspondem a pares com soma 5:

Dado cúbico	1	2	3	4
Dado octaédrico	4	3	2	1
Soma	5	5	5	5

Assim,

$$P(X = 5) = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$$

Exame – 2006, Ép. especial

21. Organizando, numa tabela, todos as somas possíveis, no conjunto dos dois lançamentos, temos:

1º lançamento \ 2º lançamento	1	1	2	2	2	2
1	2	2	3	3	3	3
1	2	2	3	3	3	3
2	3	3	4	4	4	4
2	3	3	4	4	4	4
2	3	3	4	4	4	4
2	3	3	4	4	4	4

Assim temos que as somas possíveis são $X = 2$, $X = 3$ e $X = 4$, e:

$$P(X = 2) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Logo, se $P(X = k) = \frac{1}{9}$, então $k = 2$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 17.03.2006

22. Organizando, numa tabela, todos os pares de bolas (com uma bola de cada caixa) que podem ser retirados, temos:

Caixa 2 \ Caixa 1	P	P	V	V	V
P	PP	PP	PV	PV	PV
P	PP	PP	PV	PV	PV
V	VP	VP	VV	VV	VV

Assim, pela observação da tabela, podemos afirmar que o número de bolas verdes retiradas pode ser 0 (o que acontece 4 em cada 15 vezes), 1 (o que ocorre $6+2=8$ em cada 15 vezes) ou 2 (o que verifica 3 em cada 15 vezes, ou seja, com probabilidade $\frac{1}{5}$), pelo que a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{5}$

Teste Intermédio 12.º ano – 07.12.2005

23. Como $P(X=0)=\frac{1}{4}$ sabemos que 1 em cada 4 vezes não saí qual face par nos dois lançamentos, ou seja, saí face ímpar nos dois lançamentos.

Como existem tantas faces com número par, como faces com número ímpar, $P(X=2)=\frac{1}{4}$, ou seja, também 1 em cada 4 vezes saí face par nos dois lançamentos.
Assim, como $P(X=0)=P(X=2)$ temos que $b=\frac{1}{4}$

Logo, como a soma das probabilidades é 1, temos que:

$$\frac{1}{4}+a+\frac{1}{4}=1 \Leftrightarrow a+\frac{2}{4}=1 \Leftrightarrow a+\frac{1}{2}=1 \Leftrightarrow a=\frac{2}{2}-\frac{1}{2} \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2005, Ép. especial

24. Como a Patrícia irá comer os bombons até encontrar o que tem licor, caso o encontre na primeira tentativa, não terá comido qualquer bombom sem licor, pelo que $P(X=0)\neq 0$.
Calculando $P(X=0)$, ou seja, a Patrícia comer só um bombom (o que tem licor), o que significa que seleciona ao acaso um dos 5 bombons e o bombom selecionado é o único que tem licor, temos:

$$P(X=0)=\frac{1}{5}=0{,}2$$

Pelo que podemos excluir as opções (B), (C) e (D).

Resposta: **Opção A**

Exame – 2003, 2.ª Fase

25. - A variável X_1 não tem esta distribuição de probabilidades, porque, como existem 2 faces com cada um dos três números e o dado é equilibrado, temos que: $P(X_1 = -1) = P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{3}$
    - A variável X_2não tem esta distribuição de probabilidades, porque, $(-1)^2 = 1$ e por isso a variável X_2 não toma o valor -1, pelo que: $P(X_2 = -1) \neq \frac{2}{9}$
    - A variável X_3não tem esta distribuição de probabilidades, porque, $1 + 1 = 2$ e por isso a variável X_3 pode tomar o valor 2, pelo que: $P(X_3 = 2) \neq 0$

    Resposta: **Opção D**

Exame – 2002, 2.ª Fase

26. Como a soma das probabilidades é 1, temos que:

$$a + 2a + a = 1 \;\Leftrightarrow\; 4a = 1 \;\Leftrightarrow\; a = \frac{1}{4}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2002, 1.ª Fase – 1.ª chamada

27. Como a caixa só tem bolas pretas e brancas, e se retiram, duas, retirar duas bolas brancas, é equivalente a retirar zero bolas pretas, ou seja, $P(X = 2) = P(Y = 0)$.
Da mesma forma, quando se retira uma bola branca, também se retira uma bola preta, pelo que $P(X = 1) = P(Y = 1)$.
E também, não retirar qualquer bola branca, significa que o número de bolas pretas retiradas é 2, logo, $P(X = 0) = P(Y = 2)$.
Assim, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória Y é:

y_i	0	1	2
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$

Exame – 2001, Prova para militares

28. Ao lançar por duas vezes o dado, podem ser observadas faces diferentes de 6 nos dois lançamentos, ou seja, podemos registar zero observações do número 6 no conjunto dos dois lançamentos, pelo que $P(X = 0) \neq 0$.

Como a probabilidade de não sair 6 num dos lançamentos é $\frac{5}{6}$, e o segundo lançamento é independente do primeiro, temos que $P(X = 0) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^2$. Assim podemos excluir as opções (B), (C) e (D).

Resposta: **Opção A**

Exame – 2000, 2.ª Fase