REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u'\, a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Seja (u_n) uma sucessão tal que $\lim u_n = 0$.

Qual das expressões seguintes pode ser termo geral de (u_n) ?

(A) $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n$ **(B)** $-\frac{n^2+1}{n}$ **(C)** $\frac{4n+3}{3n+4}$ **(D)** $\frac{(-1)^n}{n}$

2. Considere um triângulo equilátero, $[ABC]$, com $\overline{AB} = 1$.

Unindo os pontos médios dos lados desse triângulo, obtém-se um segundo triângulo; unindo os pontos médios dos lados do segundo triângulo, obtém-se um terceiro triângulo. Continuando a proceder deste modo, obtém-se uma sequência de n triângulos, sendo $n > 4$.

Na Figura 1, representam-se os primeiros quatro triângulos da sequência.

Mostre que a soma dos perímetros dos n triângulos da sequência é menor do que 6 unidades, qualquer que seja o valor de n .

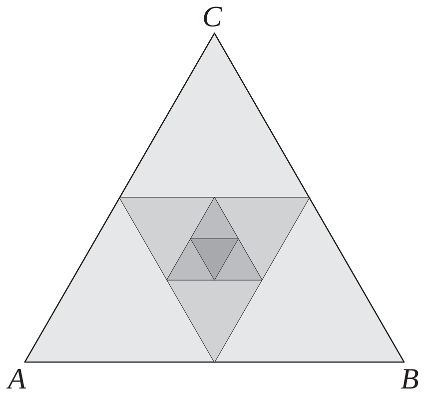


Figura 1

3. Considere todos os números naturais de seis algarismos que é possível formar com os algarismos de 1 a 9 .

Destes números, quantos têm exatamente dois cincos?

(A) $98\,415$ **(B)** $61\,440$ **(C)** $36\,015$ **(D)** $25\,200$

4. Seja E , conjunto finito, o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset E$ e $B \subset E)$.

Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos equiprováveis;
- $P(\overline{A}) = 0{,}6$;
- $P(A \cup \overline{B}) = 0{,}7$.

Determine o valor de $P((A \cup \overline{B}) \mid B)$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

5. Uma certa composição geométrica é formada por n hexágonos regulares inscritos em circunferências concêntricas, contidas num mesmo plano, de centro no ponto V, sendo $n > 3$.

A Figura 2 é um esquema de parte dessa composição, e nela estão representados três dos n hexágonos que formam a composição.

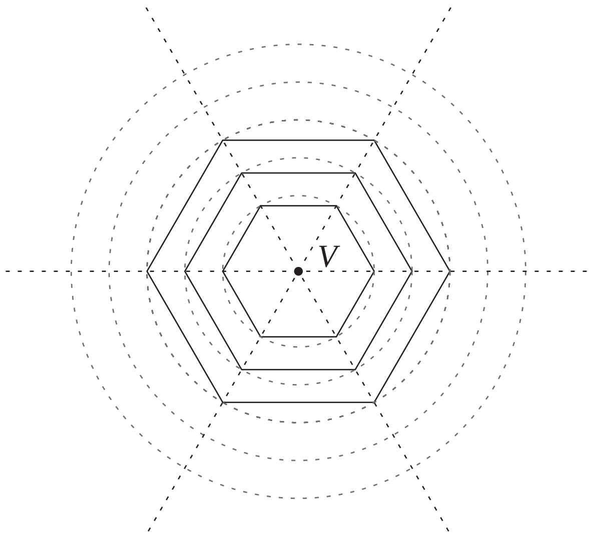


Figura 2

Considere o conjunto de pontos formado pelo ponto V e pelos vértices de todos os hexágonos da composição.

Sabe-se que, selecionando, ao acaso, dois pontos desse conjunto, a probabilidade de estes serem vértices do mesmo hexágono é igual a $\frac{5}{49}$.

Determine o valor de n.

6. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a + e^{bx}$, em que a e b são números reais.

Sabendo que o gráfico da função f contém os pontos de coordenadas $(1, 5)$ e $(2, 7)$, determine os valores de a e de b.

7. Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen}\,(2x)}{x}$?

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** 1 **(D)** 2

8. Na Figura 3, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma hexagonal reto $[ABCDEFGHIJKL]$, de bases $[ABCDEF]$ e $[GHIJKL]$.

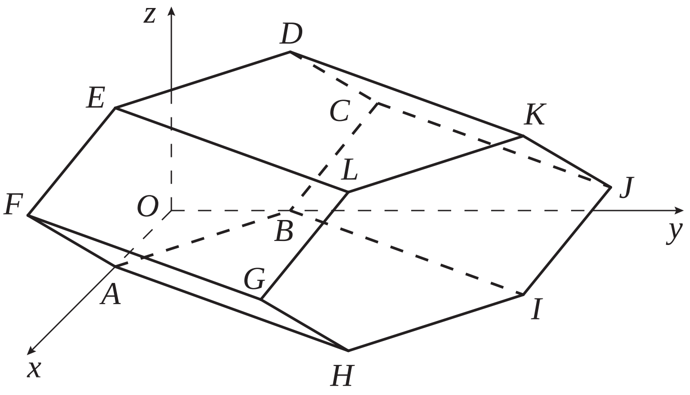


Figura 3

Sabe-se que:

- as coordenadas dos vértices A e G do prisma são, respetivamente, $(4, 0, 0)$ e $\left(12, \frac{13}{2}, 2\right)$;
- a reta EL é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (-2, -8, 4) + k(3, 4, 0)$, $k \in \mathbb{R}$.

*** 8.1.** Qual das seguintes equações define a superfície esférica de diâmetro $[AG]$?

(A) $(x-8)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{441}{16}$

(B) $(x-8)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{441}{4}$

(C) $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = \frac{441}{16}$

(D) $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = \frac{441}{4}$

*** 8.2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine as coordenadas do vértice F do prisma.

9. Na Figura 4, está representado, em referencial o.n. Oxy, o retângulo $[OABC]$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox;
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Oy;
- o ponto D pertence ao segmento de reta $[OA]$;
- o ponto E pertence ao segmento de reta $[CB]$;
- $\overline{EB} = \overline{OD} = \frac{\overline{OA}}{3}$;
- $\overline{OC} = \frac{\overline{OA}}{4}$;
- $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = -7$.

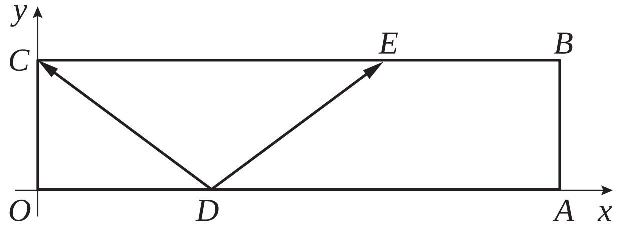


Figura 4

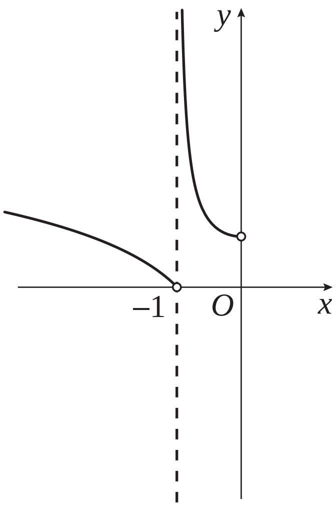
Determine $\overline{OA}$.

✱ 10. Seja g uma função par, diferenciável, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, tal que:

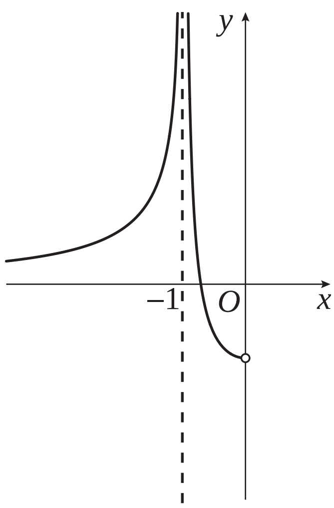
- $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$;
- $g(0) < 0$;
- $g'(x) < 0, \ \forall x \in]-\infty, -1[$.

Em cada um dos referenciais o.n. Oxy seguintes, **I**, **II** e **III**, estão representadas parte do gráfico de uma função e a assíntota a esse gráfico, de equação $x = -1$.

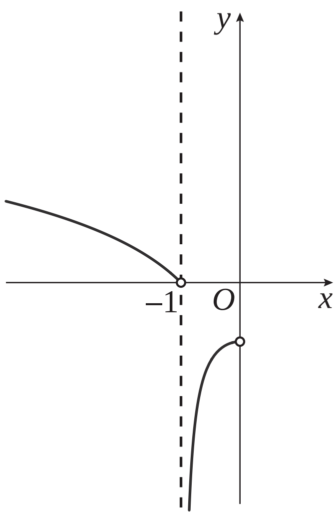
(I)



(II)



(III)



Justifique que em nenhum dos referenciais, **I**, **II** e **III**, pode estar representada parte do gráfico da função g em $]-\infty, 0[\setminus \{-1\}$.

Na sua resposta, apresente, para cada um dos referenciais, uma razão que justifique a impossibilidade de nele estar representada parte do gráfico da função g em $]-\infty, 0[\setminus \{-1\}$.

✱ 11. Na Figura 5, está representado, no plano complexo, um triângulo equilátero, $[ABC]$, inscrito numa circunferência de centro na origem do referencial, O .

O ponto A pertence ao semieixo imaginário positivo.

Os pontos A e B são os afixos dos números complexos z_1 e z_2, respetivamente .

A qual dos quadrantes do plano complexo pertence o afixo do número complexo $z_1^2 \times z_2$?

(A) Ao primeiro.

(B) Ao segundo.

(C) Ao terceiro.

(D) Ao quarto.

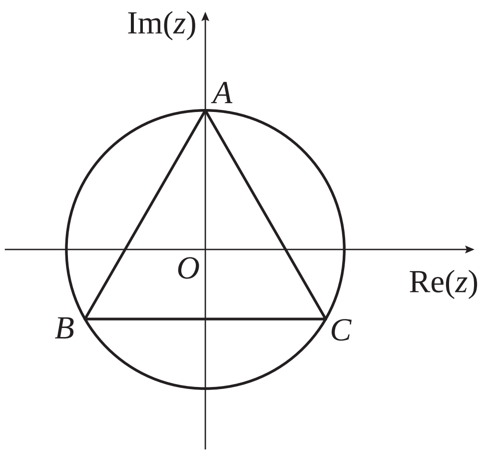


Figura 5

12. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $z = \dfrac{2\,i^{11}\,e^{i\alpha}}{-1-\sqrt{3}\,i}$, com $\alpha \in [0, 2\pi[$.

Sabe-se que:

- $\operatorname{Re}(z) = -\operatorname{Im}(z)$;
- o afixo de z pertence ao 4.º quadrante.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de α .

* **13.** Para fazer obras de remodelação das instalações, uma pequena empresa pretende pedir um empréstimo a um banco, a pagar em prestações mensais iguais.

De acordo com a proposta do banco, o valor da prestação mensal a pagar, p , em euros, é dado, em função da taxa de juro anual aplicada, j , em percentagem, pela expressão

$$p(j) = \frac{62{,}5j}{1-\left(1+\dfrac{j}{1200}\right)^{-120}} \quad , \quad \text{com } j > 0$$

Sabe-se que, no caso de a taxa de juro anual inicial duplicar, a prestação mensal aumentará 120 euros.

Determine, utilizando a calculadora gráfica, a taxa de juro anual inicial.

Apresente o resultado em percentagem, arredondado às milésimas.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

14. Considere a função f , de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \frac{\ln x + 2x}{x}$$

Resolva os itens **14.1.** e **14.2.** sem recorrer à calculadora.

* **14.1.** O gráfico da função f admite uma assíntota vertical e uma assíntota horizontal.

Determine uma equação de cada uma dessas assíntotas.

14.2. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos e determine esses extremos, caso existam.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia da função f .

15. Na Figura 6, estão representados, em referencial o.n. Oxy, uma semicircunferência de raio 2, e centro na origem do referencial, e o triângulo isósceles $[ABC]$.

Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao semieixo positivo Ox ;
- o vértice B pertence ao semieixo positivo Oy ;
- o vértice C pertence ao semieixo negativo Ox ;
- $\overline{AB} = \overline{BC}$;
- o lado $[AB]$ é tangente à semicircunferência no ponto T ;
- $A\hat{O}T = \alpha$, $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

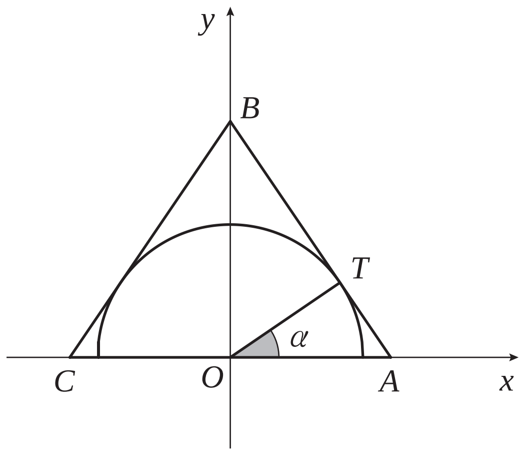


Figura 6

Prove que a área do triângulo $[ABC]$ é dada, em função de α, por $\dfrac{8}{\operatorname{sen}(2\alpha)}$.

16. Considere as funções f e g, de domínio $]0, +\infty[$, definidas por $f(x) = \dfrac{k}{x}$ e por $g(x) = -\dfrac{k}{x}$, com $k > 0$.

Considere ainda:

- dois pontos P e Q, com a mesma abcissa, pertencentes, respetivamente, ao gráfico da função f e ao gráfico da função g ;
- a reta s, tangente ao gráfico da função f no ponto P ;
- a reta t, tangente ao gráfico da função g no ponto Q ;
- o ponto R, ponto de intersecção das retas s e t .

Mostre que, qualquer que seja a abcissa dos pontos P e Q, a área do triângulo $[PQR]$ é igual a k .

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	3.	5.	7.	8.1.	8.2.	10.	11.	13.	14.1.	15.	16.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	12	14	12	12	14	14	12	14	14	14	14	**158**

Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	2.	4.	6.	9.	12.	14.2.	Subtotal
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos						**42**
TOTAL							**200**