REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2022

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 7 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

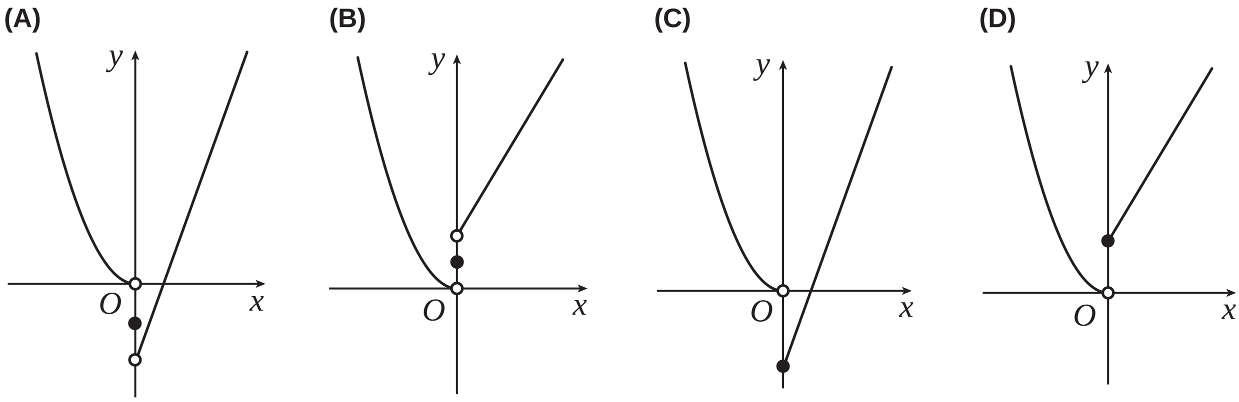
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Em qual das opções seguintes está representada graficamente, em referencial o.n. Oxy , uma função que tem um mínimo em $x = 0$?



2. A soma de todos os elementos de uma dada linha do triângulo de Pascal é igual a $16\,384$.

Qual é o valor do quarto elemento da linha seguinte?

(A) 286 **(B)** 455 **(C)** 715 **(D)** 1365

3. Dos passageiros de um voo de avião do Porto para Faro sabe-se que, antes do embarque:

- 70% nunca tinham viajado de avião;
- $\frac{2}{5}$ já tinham estado em Faro;
- metade dos que já tinham estado em Faro já tinha viajado de avião.

Admita que a ordem de saída dos passageiros deste voo é aleatória.

O primeiro passageiro a sair do avião nunca tinha estado em Faro.

Qual é a probabilidade de esta ter sido a primeira viagem de avião desse passageiro?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

4. Um saco contém 12 cartões com a forma de retângulos geometricamente iguais: 3 azuis, 2 brancos, 3 pretos e 4 vermelhos.

Os 12 cartões vão ser retirados, sucessivamente e ao acaso, do saco e dispostos sobre uma mesa, alinhados pela ordem em que são retirados.

Determine a probabilidade de os cartões azuis ficarem todos juntos.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

5. Na Figura 1, está representado o cubo $[ABCDEFGH]$.

Fixado um determinado referencial o.n. $Oxyz$, tem-se:

$A(-2, 5, 0)$, $B(1, -1, 2)$ e $C(3, 2, 8)$.

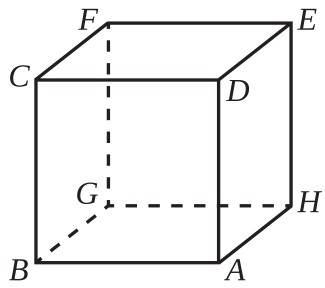


Figura 1

* **5.1.** Qual é o valor de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HE}$?

(A) -49 **(B)** 0

(C) 7 **(D)** 49

* **5.2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Sabe-se que o vértice E do cubo pertence à reta definida pela equação

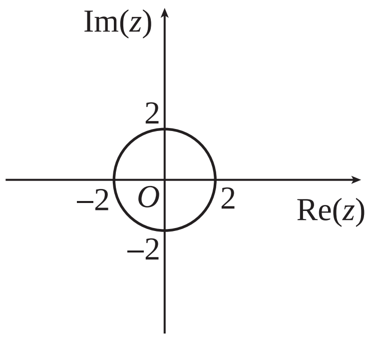
$$(x, y, z) = (0, 0, 3) + k(1, -1, -1), \quad k \in \mathbb{R}$$

Determine as coordenadas do vértice E.

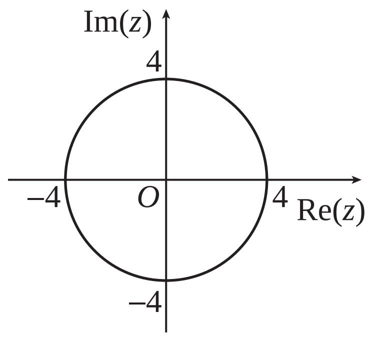
* **6.** Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição $z \times \overline{z} = 4$.

Em qual das opções seguintes está representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?

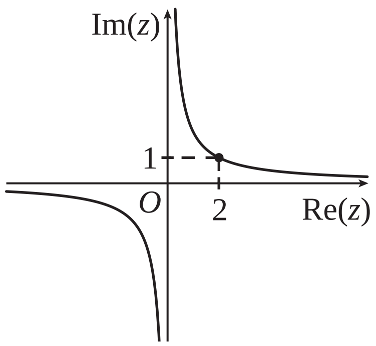
(A)



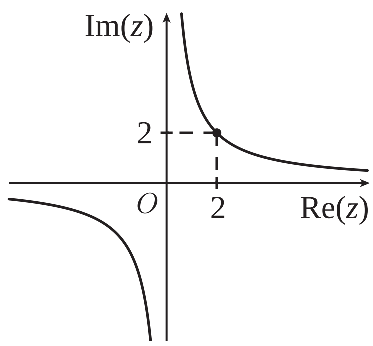
(B)



(C)



(D)



7. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número complexo $z = \dfrac{4}{1-i} + 4i^{18}$.

O número complexo z é uma das raízes cúbicas de um número complexo w .

Determine as restantes raízes cúbicas de w e apresente-as na forma trigonométrica.

* **8.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ \ln\sqrt{e+x} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Averigue se a função f é contínua em $x = 0$.

9. Seja g uma função derivável, de domínio $]-\infty, \pi[\ \setminus \{0\}$, cuja derivada, g', é dada por

$$g'(x) = \begin{cases} 3e^{2x} - 7e^{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ x + 2\cos^2 x & \text{se} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

Resolva os itens **9.1.** e **9.2.** sem recorrer à calculadora.

* **9.1.** Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $]0, \pi[$.

Na sua resposta, apresente:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g .

* **9.2.** Considere, em referencial o.n. Oxy, o gráfico da função g .

Determine, no intervalo $]-\infty, 0[$, a abcissa do ponto do gráfico da função g em que a reta tangente ao gráfico da função é paralela à reta de equação $y = -2x$.

10. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja h a função, de domínio $]0, +\infty[$, definida por $h(x) = \dfrac{e^x + \ln x}{e^x - 1}$.

Estude a função h quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso estas existam, escreva as respetivas equações.

11. Um tanque, que inicialmente tinha um certo volume de água salgada, dispõe de duas torneiras, uma de enchimento e outra de vazamento. As duas torneiras são abertas, em simultâneo, sendo vertida água do mar para o tanque até este estar cheio.

Admita que a massa de sal, m, em quilogramas, no tanque, t minutos após a abertura das torneiras, até o tanque estar cheio, é dada por

$$m(t) = \frac{30(1 + 0{,}006t)^3 - 29}{(1 + 0{,}006t)^2} \quad , \quad \text{com } t \in [0, 250]$$

* **11.1.** Qual é, com aproximação às unidades, a percentagem de aumento da massa de sal no tanque, no primeiro minuto após a abertura das torneiras?

(A) 152% **(B)** 52% **(C)** 250% **(D)** 25%

* **11.2.** Existe um instante a partir do qual, passada meia hora, a massa de sal no tanque triplica.

Determine, recorrendo à calculadora, esse instante, sabendo-se que existe e é único.

Apresente o resultado em minutos e segundos (com os segundos arredondados às unidades).

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente a(s) coordenada(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às centésimas.

12. Seja (u_n) a sucessão definida por

$$u_n = \begin{cases} (-1)^n & \text{se } n \leq 3 \\ \dfrac{4n - 1}{n + 3} & \text{se } n > 3 \end{cases}$$

Mostre que a sucessão (u_n) é limitada.

13. Seja a um número real.

Considere a função polinomial definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+a^2x+\sqrt{2}$.

Mostre que, para qualquer valor de a , a função não tem extremos.

14. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Na Figura 2, estão representadas, em referencial o.n. Oxy , as retas r e s .

A reta r é definida pela equação $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+1$.

A reta s passa pela origem do referencial e tem inclinação α .

O ponto A é o ponto de intersecção da reta r com o eixo Ox .

O ponto B é o ponto de intersecção das duas retas.

Sabe-se que $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

Determine a área do triângulo $[AOB]$.

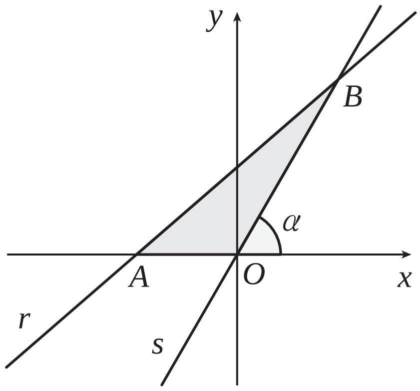


Figura 2

✱ **15.** Considere, num referencial o.n. Oxy , o gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=x^2$, e uma reta r , não vertical, que passa no ponto de coordenadas $(0,1)$.

Sejam A e B os pontos de intersecção da reta r com o gráfico da função f .

Mostre que o ângulo convexo AOB é um ângulo reto.

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td>1.</td><td>2.</td><td>3.</td><td>5.1.</td><td>5.2.</td><td>6.</td><td>8.</td><td>9.1.</td><td>9.2.</td><td>11.1.</td><td>11.2.</td><td>15.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td>12</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>158</td></tr>
<tr><td>Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td colspan="2">4.</td><td colspan="2">7.</td><td colspan="2">10.</td><td colspan="2">12.</td><td colspan="2">13.</td><td colspan="2">14.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="12">3 × 14 pontos</td><td>42</td></tr>
<tr><td>TOTAL</td><td colspan="12"></td><td>200</td></tr>
</table>

Prova 635

2.ª Fase