# Exame Final Nacional de Matemática A

## Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2024

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

# Formulário

## Geometria

**Comprimento de um arco de circunferência:**

$\alpha r$ ($\alpha$ – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r$ – raio)

**Área de um polígono regular:** *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

**Área de um sector circular:**

$\frac{\alpha r^2}{2}$ ($\alpha$ – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r$ – raio)

**Área lateral de um cone:** $\pi r g$ ($r$ – raio da base; $g$ – geratriz)

**Área de uma superfície esférica:** $4\pi r^2$ ($r$ – raio)

**Volume de uma pirâmide:** $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

**Volume de um cone:** $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

**Volume de uma esfera:** $\frac{4}{3}\pi r^3$ ($r$ – raio)

## Progressões

Soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão $(u_n)$:

**Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

## Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

## Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

## Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

**1.** Na Figura 1, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$ , o cubo $[ABCDEFGH]$ .

Sabe-se que:

- o plano $ABC$ é definido pela equação $x=0$ ;
- o ponto $A$ pertence ao semieixo positivo $Oy$ , e $\overline{OA}=4$ ;
- o ponto $F$ pertence ao plano $xOy$ ;
- a reta $FC$ é definida pela equação vetorial
$(x, y, z)=(-5, 2, 14)+k(-5, -1, 7), \quad k \in \mathbb{R}$ .

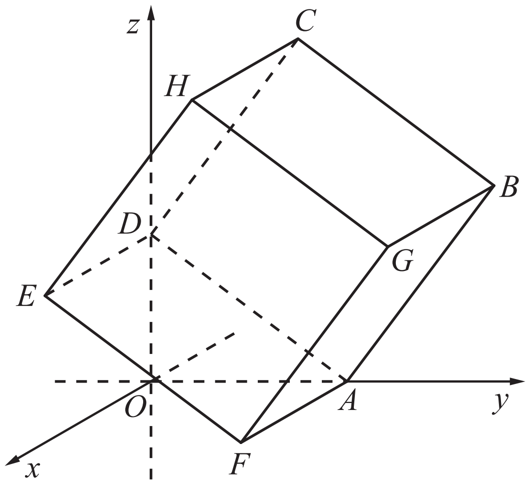


Figura 1

* **1.1.** Qual das seguintes equações vetoriais define a reta que passa no ponto $A$ e é paralela à reta $FC$ ?

**(A)** $(x, y, z)=(-5, 1, 7)+k(1, -5, 0), \quad k \in \mathbb{R}$

**(B)** $(x, y, z)=(5, 1, -7)+k(-1, 5, 0), \quad k \in \mathbb{R}$

**(C)** $(x, y, z)=(-10, 2, 14)+k(5, 1, -7), \quad k \in \mathbb{R}$

**(D)** $(x, y, z)=(10, 2, -14)+k(5, 1, -7), \quad k \in \mathbb{R}$

* **1.2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine a equação cartesiana reduzida da superfície esférica que contém todos os vértices do cubo $[ABCDEFGH]$ .

**2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

De uma progressão aritmética $(u_n)$ , sabe-se que a soma do primeiro com o quinto termo é igual a $26$ e que o nono termo é igual a $31$ .

Averigue se $835$ é termo da progressão $(u_n)$ .

**3.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Na Figura 2, estão representados, em referencial o.n. $Oxy$ , parte do gráfico da função $f$, de domínio $\mathbb{R}^+$ , definida por $f(x)=\log_{2a} x$ , com $a>1$ , e o trapézio $[ABCD]$ .

Sabe-se que:

- os pontos $A$ e $B$ pertencem ao eixo $Ox$ e têm abcissas $a$ e $a+4$ , respetivamente;
- os pontos $D$ e $C$ pertencem ao gráfico de $f$ e têm abcissas $a$ e $a+4$ , respetivamente.

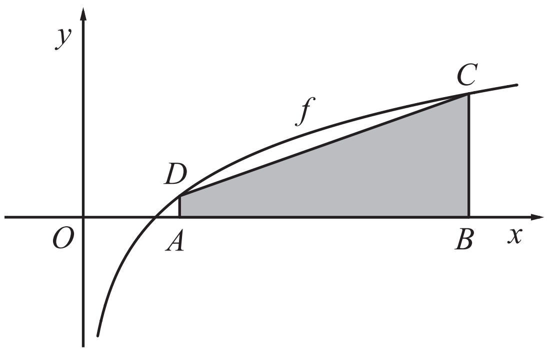


Figura 2

Determine o valor de $a$ para o qual a área do trapézio $[ABCD]$ é igual a $4$ .

*** 4.** Na tabela seguinte, apresentam-se os dados relativos à remuneração base média mensal dos trabalhadores portugueses por conta de outrem, por sexo, em seis anos pertencentes ao período de 1995 a 2020.

| **Anos** | **Remuneração base média mensal – homens (€)** $(x)$ | **Remuneração base média mensal – mulheres (€)** $(y)$ |
|---|---|---|
| **1995** | 542,8 | 416,8 |
| **2000** | 674,7 | 523,6 |
| **2005** | 832,5 | 672,0 |
| **2010** | 976,7 | 800,8 |
| **2015** | 990,1 | 825,0 |
| **2020** | 1109,2 | 960,3 |

Fonte: PORDATA (consultado em setembro de 2023).

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela anterior.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

A mediana da remuneração base média mensal dos homens é ___**I**___ euros, e a amplitude interquartil é ___**II**___ euros.

De 2015 para 2020, a remuneração base média mensal das mulheres teve um aumento percentual igual a ___**III**___ .

O coeficiente de correlação linear das variáveis $x$ e $y$, apresentadas na tabela, arredondado às milésimas, é ___**IV**___ .

| **I** | **II** | **III** | **IV** |
|---|---|---|---|
| **a)** 832,5<br>**b)** 854,3<br>**c)** 904,6 | **a)** 315,4<br>**b)** 440,9<br>**c)** 566,4 | **a)** 14,1%<br>**b)** 16,4%<br>**c)** 17,2% | **a)** 0,874<br>**b)** 0,913<br>**c)** 0,998 |

**5.** Na Figura 3, estão representados, em referencial o.n. $Oxy$, a circunferência de equação $(x-1)^2 + y^2 = 9$ e o triângulo $[PQR]$, inscrito na circunferência.

Seja $\alpha$ a amplitude, em radianos, do ângulo $QPR$.

Sabe-se que:

- $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência;
- $\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QP} = 27$.

Determine o valor de $\alpha$.

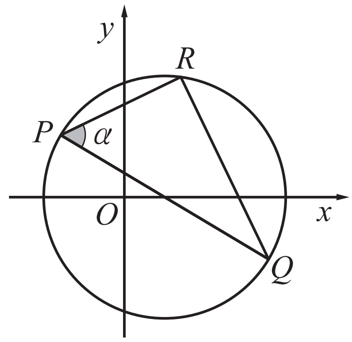


Figura 3

**6.** Seja $f$ uma função contínua, de domínio $[0, +\infty[$, com $f(0) = 2$, e seja $g$ uma função, de domínio $\mathbb{R}$, definida, para um certo valor de $k$ real, por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{e^{-k}(e^x - 1)}{-x^2 + 2x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

*** 6.1.** A reta de equação $y = 3x - 5$ é assíntota ao gráfico da função $g$, quando $x \to +\infty$.

Qual das seguintes igualdades é verdadeira?

**(A)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) + 3x) = -5$ **(B)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) + 3x) = 5$

**(C)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - 3x - 5) = 0$ **(D)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - 3x + 5) = 0$

*** 6.2.** Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de $k$, sabendo que a função $g$ é contínua em $x = 0$.

**7.** Considere um dado cúbico equilibrado com as faces numeradas de $1$ a $6$.

*** 7.1.** Lança-se esse dado três vezes e regista-se o número da face que ficou voltada para cima em cada lançamento.

Qual é a probabilidade de, em exatamente dois desses lançamentos, se obter, na face voltada para cima, um múltiplo de $3$?

**(A)** $\dfrac{1}{27}$ **(B)** $\dfrac{2}{27}$ **(C)** $\dfrac{1}{9}$ **(D)** $\dfrac{2}{9}$

*** 7.2.** Considere todos os números naturais com seis algarismos diferentes que é possível formar usando os algarismos $1$, $2$, $3$, $4$, $5$ e $6$, inscritos nas faces do dado.

Determine quantos desses números são pares, inferiores a trezentos mil, e com os algarismos $2$ e $4$ um ao lado do outro. Um número nestas condições é, por exemplo, $142\,356$.

**8.** Seja $E$, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, e sejam $A$ e $B$ dois acontecimentos $(A \subset E$ e $B \subset E)$.

Sabe-se que:

- $0 < P(A) < 1$ e $0 < P(B) < 1$;
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 9\,P(A \cap B)$;
- $P(\overline{A}) = 3\,P(B)$.

Determine o valor de $P(A|B)$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

*** 9.** Uma empresa que fabrica suspensões para veículos está a testar a elasticidade nas vibrações verticais de um certo tipo de mola.

Num dos testes, fixou-se uma das extremidades de uma mola numa bancada, e a extremidade livre foi alongada alguns centímetros acima da posição de equilíbrio, tendo sido depois solta (Figura 4).

Admita que a mola oscila numa trajetória vertical e que o deslocamento, $y$, em centímetros, da extremidade livre da mola, em relação à posição de equilíbrio, no primeiro segundo, é dado, em cada instante $t$, em segundos, por

$$y(t) = 7{,}5\,e^{-1{,}5t}\,\text{sen}(8{,}6t + 1{,}6), \text{ com } t \in [0, 1]$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos).

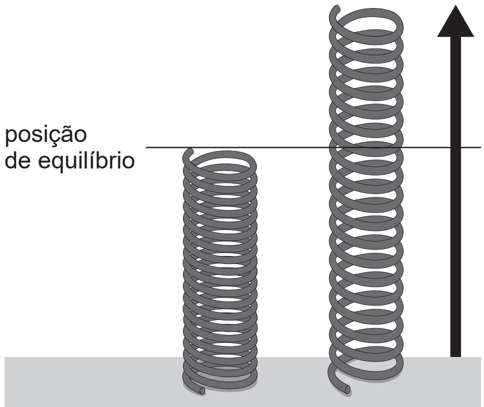


Figura 4

Existem três instantes em que a extremidade livre da mola está meio centímetro abaixo da posição de equilíbrio.

Determine, recorrendo à calculadora, o primeiro desses instantes.

Apresente o resultado arredondado às centésimas de segundo.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

* **10.** Seja $f$ uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, duas vezes diferenciável.

Relativamente à função $f$, sabe-se que:

- a função $f'$, derivada da função $f$, é estritamente crescente no intervalo $]0, +\infty[$ ;
- $f'(1) = 2$ .

Considere as proposições seguintes.

**I.** O gráfico da função $f$ pode ter concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}^+$ .

**II.** No intervalo $]1, 5[$ , a função $f$ tem, pelo menos, um extremo.

Justifique que as proposições **I** e **II** são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

**11.** Seja $g$ uma função diferenciável, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ , cuja derivada, $g'$, é dada por

$$g'(x) = \cos(2x) + 2\operatorname{sen} x$$

Resolva os itens **11.1.** e **11.2.** sem recorrer à calculadora.

* **11.1.** Seja $r$ a reta tangente ao gráfico de $g$ no ponto de abcissa $0$ , e seja $s$ a reta paralela à reta $r$ que intersecta o eixo $Ox$ no ponto de abcissa $4$ .

Determine a equação reduzida da reta $s$ .

**11.2.** Estude a função $g$ quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de $g$ tem concavidade voltada para baixo;

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de $g$ tem concavidade voltada para cima;

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de $g$ , caso este(s) exista(m).

* **12.** Considere o ponto $A$ , afixo no plano complexo do número $z = -2i$ .

Qual dos seguintes números complexos tem como afixo o transformado do ponto $A$ por uma rotação de centro na origem e de ângulo orientado de amplitude $\frac{\pi}{3}$ radianos?

**(A)** $\sqrt{3} - i$ **(B)** $-\sqrt{3} + i$ **(C)** $1 - \sqrt{3}\,i$ **(D)** $-1 + \sqrt{3}\,i$

**13.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $w = \dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}}$ .

O número complexo $w$ é uma das raízes sextas de um certo número complexo $z$ .

Determine $iz$ .

* **14.** Considere uma função $f$, de domínio $\mathbb{R}$, par e diferenciável.

Seja $a$ um número real tal que $f'(a) = f(a)$ , com $f(a) \neq 0$ .

Prove que $f'(-a) \times f'(a) = -[f(a)]^2$ .

**Sugestão:** na sua resposta, poderá fazer uso da definição de derivada de uma função num ponto.

# FIM

## COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td>1.1.</td><td>1.2.</td><td>4.</td><td>6.1.</td><td>6.2.</td><td>7.1.</td><td>7.2.</td><td>9.</td><td>10.</td><td>11.1.</td><td>12.</td><td>14.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>14</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>158</td></tr>
<tr><td>Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td colspan="2">2.</td><td colspan="2">3.</td><td colspan="2">5.</td><td colspan="2">8.</td><td colspan="2">11.2.</td><td colspan="2">13.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="12">3 × 14 pontos</td><td>42</td></tr>
<tr><td colspan="13">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>